Neměnky

Víťa Kala

Použití neměnků (neboli invariantů) je nesmírně užitným postupem pro řešení rozličných často velmi obtížných příkladů. V zásadě jde o to, že pokud se v zadání něco **mění**, je dobré zkusit najít něco, co se naopak **nemění** nikdy, tedy nějaký **neměnek**. Zadání příkladů, v kterých se hodí nějaký hledat, tedy často obsahují výrazy jako „Je možné po několika krocích dostat …“

Vhodným neměnkem může být třeba součet nebo rozdíl nějakých čísel, jeho parita (jestli je sudý nebo lichý), zbytek po dělení 3 nebo jiným číslem, vzdálenost od nějakého bodu, …

V souvislosti s neměnky v podstatě nejde rozvíjet žádná velká teorie; jediný způsob, jak se je naučit používat, je počítat příklady, v kterých se vyskytnou. Tak hurá do toho! (:

Příklad 1. Nechť je n liché přirozené číslo. Na tabuli jsou napsaná čísla $1, 2, \dots$ $\dots, 2n$. V každém kroku si vybereme dvě čísla a, b, která smažeme a nahradíme absolutní hodnotou jejich rozdílu. Dokažte, že na konec zůstane na tabuli liché číslo.

Příklad 2. Na obvodu kruhu je napsáno 6 čísel, po řadě 1, 0, 1, 0, 0, 0. V každém kroku můžeme zvýšit libovolná dvě sousední čísla o 1. Je možné po několika krocích dostat všechna čísla stejná?

Příklad 3. Každý poslanec tramtárijského parlamentu má nejvýše 3 nepřátele. Dokažte, že je možné parlament rozdělit na dvě komory (ne nutně stejně velké) tak, že každý poslanec má nejvýše 1 nepřítele ve své komoře.

Příklad 4. Předpokládejme, že celá čísla a, b, c, d nejsou všechna stejná. Začněme se čtveřicí (a, b, c, d) a nahraďme ji $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Dokažte, že opakováním tohoto postupu se aspoň jedno číslo stane libovolně velkým.

Příklad 5. Začněme se celými čísly $1, 2, 3, \dots, 4n-1$. V každém kroku nahradíme libovolná dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že poslední číslo bude sudé.

Příklad 6. Začněme s množinou (3, 4, 12). V každém kroku vybereme dvě z čísel a, b a nahradíme je čísly $0{,}6a - 0{,}8b$ a $0{,}8a + 0{,}6b$. Je možné dosáhnout stavu (4, 6, 12)?

Příklad 7. Mějme normálně obarvenou šachovnici 8×8. V každém kroku můžeme přebarvit všechna pole nějakého řádku či sloupce nebo čtverce 2×2. Je možné dostat šachovnici s jen jedním černým políčkem?

Příklad 8. Na stole je a červených, b bílých a c černých piškotů. V jednom kroku můžeme sníst dva piškoty různých barev a nahradit je dvěma piškoty třetí barvy.

Na začátku bylo $a = 13, b = 15, c = 17$. Je možné po několika krocích dosáhnout stavu, v němž mají všechny piškoty stejnou barvu? Jak je tomu v obecném případě?

Příklad 9. Na kružnici je napsáno 5 jedniček a 4 nuly v libovolném pořadí. Potom mezi dvě sousední stejná čísla napíšeme 0 a mezi dvě různá 1. Nakonec původní čísla vymažeme. Je takto možné po několika krocích dostat samé nuly?

Příklad 10. Každé z čísel 1 až 1 000 000 je opakovaně nahrazované svým ciferným součtem, dokud nedostaneme milión jednociferných čísel. Bude mezi nimi víc jedniček nebo dvojek?

Příklad 11. Obsahuje posloupnost čtverců přirozených čísel nekonečnou aritmetickou podposloupnost?

Příklad 12. Nechť $d(n)$ značí ciferný součet čísla n. Řešte rovnici $n + d(n) + d(d(n)) = 2005$.

Příklad 13. Mějme čísla $a, b, 0 < b < a$. Nechť $x_0 = a, y_0 = b, x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, y_{n+1} = 2x_n y_n/(x_n + y_n)$. Jak se chovají posloupnosti x_n, y_n?

Příklad 14. Škrtneme první cifru čísla 7^{2004} a potom ji přičteme ke zbývajícímu číslu. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nedostaneme deseticiferné číslo. Je možné, aby obsahovalo všechny číslice $0, 1, \ldots, 9$?

Příklad 15. Na každém políčku obdélníkové šachovnice je napsané přirozené číslo. V každém tahu můžeme zdvojnásobit každé číslo v nějakém řádku nebo odečíst 1 od každého z čísel v nějakém sloupci. Je možné dostat po několika tazích tabulku obsahující samé nuly?

Příklad 16. Vrcholy n-úhelníka jsou očíslované reálnými čísly. Buďte a, b, c, d čtyři sousední čísla. Je-li $(a - d)(b - c) < 0$, můžeme vyměnit b a c. Může být tato operace prováděna nekonečně dlouho?

Příklad 17. Čísla $1, 2, \ldots, 2n$ jsou libovolně uspořádaná na pozicích očíslovaných $1, 2, \ldots, 2n$. Přičtěme ke každému z čísel číslo jeho pozice. Dokažte, že dva ze součtů dávají stejný zbytek po dělení n.

Příklad 18. Řešte rovnici $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$.

Příklad 19. Množinu S bodů v prostoru můžeme rozšířit o obraz libovolného bodu $X \in S$ ve středové souměrnosti se středem v $A \in S$, $A \neq X$. Na začátku S obsahuje 7 vrcholů krychle. Může se časem stát i 8. vrchol prvkem S?

Příklad 20. Na tabuli jsou na začátku čísla 18 a 19. V jednom kroku můžeme napsat na tabuli číslo rovné součtu dvou libovolných čísel, jež byla předtím na tabuli. Může být někdy na tabuli napsané číslo 1994?

Příklad 21. Každý člen posloupnosti $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ počínaje sedmým je součtem předchozích šesti mod 10. Dokažte, že se v posloupnosti nikdy nevyskytne šestice $\dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

Příklad 22. Řešte rovnici $f(f(x)) = x$, kde $f(x)$ je libovolný kvadratický mnohočlen.

Příklad 23. Dvě políčka na obrázku jsou sousední, jestliže mají společnou hranu. V jednom kroku můžeme k libovolným dvěma sousedním políčkům přičíst stejné celé číslo. Je možné první tabulku převést několika tahy na druhou?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Příklad 24. $2n$ velvyslanců je pozvaných na kongres. Každý z nich má nejvýše $n - 1$ nepřátel. Dokažte, že je můžeme usadit kolem kulatého stolu tak, že nikdo nesedí vedle svého nepřítele.

Příklad 25. Na každém políčku šachovnice 8×8 je napsané přirozené číslo. V jednom tahu si vybereme tabulku 4×4 nebo 3×3 a přičteme 1 ke každému z jejích políček. Můžeme vždy dostat tabulku se všemi čísly dělitelnými (a) dvěma, (b) třemi?