Německý lesík a teorie čísel

Míša Prokešová

Nejdříve k tomu německému lesíku – po něm je pojmenována jedna zajímavá úloha (svého času se objevila i v MO).

Úloha o německém lesíku. *Mějme čtverec o straně 51 metrů a ve vrcholech jednotlivých podčtverců o stranách 1 metr nechť jsou vysázeny stromy, které mají průměr kmene 8 cm. Tento útvar nazveme německým lesíkem. Pokud stojí pozorovatel přesně uprostřed německého lesíku, vidí z něho ven?*

Tato úloha se dá lehce vyřešit s pomocí takzvané Minkowského věty.

Věta. *Nechť C je konvexní množina v rovině, symetrická podle počátku, a nechť její obsah je větší než 4. Pak existuje mřížový bod, různý od počátku, který leží v C.*

K pochopení, co věta říká, je asi třeba několik vysvětlení:

Konvexní množina je taková, která s každými dvěma body obsahuje i úsečku, která je spojuje (tj. matematicky s každými dvěma body x, y obsahuje všechny body tvaru $x + \lambda y$, kde $0 \leq \lambda \leq 1$).

Množina *symetrická podle počátku* s každým bodem x obsahuje i bod $-x$.

Mřížové body jsou body s celočíselnými souřadnicemi.

Tvrzení věty se dá samozřejmě zobecnit i pro vyšší dimenze, pak ovšem místo se čtyřkou porovnáváme objem útvaru s 2^d, kde d je dimenze prostoru. Mimo naší úlohy o lesíku se Minkowského věta dá použít i pro důkazy existence bodů s celočíselnými koeficienty v jiných vhodných konvexních útvarech, a tím i pro důkazy např. následujících tvrzení z teorie čísel.

Věta. *Nechť α je reálné číslo, N přirozené číslo. Pak existují celá čísla m, n taková, že $0 < n \leq N$ a*

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nN}.$$

(Z toho plyne, že existuje nekonečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že $|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^2}$.)

Věta. *Každé prvočíslo p dávající při dělení čtyřmi zbytek 1 lze zapsat jako součet dvou čtverců $p = a^2 + b^2$, kde a, b jsou celá.*