Některé geometrické věty

Pavel Podbrdský

V tomto příspěvku najdete některé užitečné geometrické věty, které se často hodí při řešení příkladů. Na přednášce si možná některé z nich dokážeme, hlavní náplní ale bude řešení příkladů.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem S a AB její tětiva. Pak velikost úhlu $\angle AOB$ se nemění, probíhá-li O některý z oblouků kružnice k určných tětivou AB. Navíc je $|\angle AOB| = \frac{1}{2}|\angle ASB|$, kde úhlem $\angle ASB$ rozumíme vnější úhel v čtyřúhelníku $AOBS$.*

Věta. (Mocnost bodu ke kružnici) *Nechť k je kružnice se středem S a M bod. Nechť přímka p prochází bodem M a protíná k v bodech A a B. Pak číslo $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě přímky p a je rovno hodnotě $\left|m^2 - r^2\right|$, kde $m = |MS|$ a r je poloměr k. Číslo $m^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k.*

Věta. (sinová) *V trojúhelníku ABC se standartním označením (R je poloměr kružnice opsané) platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Věta. (Cévova) *Nechť ABC je trojúhelník a A_1, B_1, C_1 leží po řadě na úsečkách BC, AC, AB. Pak přímky AA_1, BB_1, CC_1 se protínají v jednom bodě právě tehdy, když $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1$.*

Věta. (Van Aubelova) *Nechť v trojúhelníku ABC z minulé věty se příčky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v bodě K. Pak $\frac{|AK|}{|KA_1|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} + \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$.*

Věta. (Ptolemaios) *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Pak $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$. Rovnost nastává právě tehdy, když čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.*

Definice. (Kruhová inverze) *Nechť je dán bod S a poloměr r. Kruhovou inverzí o středu S a poloměru r rozumíme zobrazení, které každému bodu $M \neq S$ přiřadí bod M' s vlastnostmi*

(1) *M' leží na polopřímce SM.*
(2) $|SM| \cdot |SM'|$.

Věta. (Vlastnosti kruhové inverze)

(1) *Množina samodružných bodů je kružnice o středu S a poloměru r. Vnějšek této kružnice se zobrazí na vnitřek a naopak (proto název „kruhová inverze“).*

(2) *Dvakrát provedená kruhová inverze je identita (na celé rovině kromě bodu S).*
(3) *Přímka procházející bodem S se zobrazí sama na sebe. Přímka neprocházející bodem S se zobrazí na kružnici procházející bodem S a naopak. Kružnice neprocházející bodem S se zobrazí na kružnici neprocházející bodem S (ale pozor, příslušné středy kružnic se na sebe nezobrazí!).*
(4) *Kruhová inverze zachovává úhly, které svírají dvě protínající se křivky (učeně řečeno, kruhová inverze je konformní zobrazení).*

Příklad za odměnu (odměna za příklad)

Hlavní náplní přednášky bude řešení několika příkladů. Jeden z nich uvádím už do sborníčku. Kdo ho do přednášky vyřeší a odváží se ho předvést, dostane *Studentskou pečeť*.

Příklad. Nechť v trojúhelníku ABC je dán vnitřní bod P takový, že $|\angle APB| - |\angle ACB| = |\angle APC| - |\angle ABC|$. Dokažte, že pak osa úhlu $\angle ABP$, osa úhlu $\angle ACP$ a přímka AP se protínají v jednom bodě.