Nekonečno

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek představuje základní vlastnosti pojmu sloužícího ke srovnávání množin podle velikosti, tzv. mohutnosti. Dále obsahuje několik úloh a klasických tvrzení týkajících se (převážně spočetného) nekonečna.

Co je to nekonečno?

To je přece jasné, *nekonečno* je to, co nemá konec. Nebo že by to nebylo tak snadné? Intuitivně tento pojem používáme pro taková „množství“, která nejdou spočítat, jinými slovy kvantitativně vyjádřit nějakým přirozeným číslem. To už vypadá slibně. Znamená to, že si při počítání věcí vystačíme s přirozenými čísly a magickým symbolem ∞? Kolik je potom $\infty \cdot \infty$? A kolik z nekonečně mnoha jablek nám zbyde, když jich nekonečno sníme? Jistě cítíte, že budeme muset být při práci s nekonečnem opatrní. To samé cítili i matematici v devatenáctém století, kteří začali s matematicky korektním zkoumáním nekonečna. Výsledkem tohoto snažení je *teorie množin*, která se kromě práce s nekonečnem náhodou hodí i jako základní jazyk celé matematiky. Pro nás je ale ve své celé kráse poněkud složitá a formální, vezmeme si z ní tedy jen to nejnutnější.

Srovnávání velikostí množin

Když chtějí dva pastýři zjistit, čí stádo je větší, prostě je spočítají a porovnají získaná čísla. Tento způsob se pro obecné (tedy i nekonečné) množiny zjevně moc nehodí. Můžeme ale pastýřům navrhnout, aby svá stáda zkusili pěkně ovečku po ovečce popárovat. Pokud se jim to podaří, pak jsou jejich stáda stejně velká. Pokud jednomu nějaké ovečky přebydou, je jeho stádo větší.

Definice. Řekneme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, pokud mezi A a B existuje bijekce, tedy zobrazení, které je prosté a na (píšeme $A \approx B$). Řekneme, že množina A má *mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti* B, pokud existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B (zapisujeme $A \preccurlyeq B$). Řekneme, že množina A má *mohutnost menší než* B, pokud existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B a neexistuje prosté zobrazení množiny B do množiny A (zapisujeme $A \prec B$). Analogicky definujeme vztahy $A \succcurlyeq B$, $A \succ B$.

Konečně se dostáváme k definici nekonečnosti.

Definice. Množina A je *nekonečná*, pokud má neostře větší mohutnost než množina přirozených čísel, tedy pokud $\mathbb{N} \preccurlyeq A$. Množina A je *konečná*, pokud není nekonečná. Pokud $A \preccurlyeq \mathbb{N}$, pak říkáme, že A je *spočetná.* Laicky řečeno spočetné jsou ty množiny, které jdou očíslovat přirozenými čísly (ne nutně všemi).

Všimněme si, že konečné množiny srovnáváme stejně jako dřív, jen bez prostředníků v podobě přirozených čísel.

Příklad. (hotel U Ležaté osmy) Uvažme hotel, který má pokoje očíslované právě všemi přirozenými čísly. Všechny pokoje jsou obsazené a každý host vyžaduje celý pokoj pro sebe.

(i) Do hotelu přijel nový host. Dokážete jej ubytovat, aniž byste museli nějakého stávajícího hosta vyhodit?
(ii) Do hotelu přijelo spočetně mnoho nových hostů. Ubytujte je.
(iii) Každý ze spočetně mnoha autobusů přivezl spočetně mnoho nových hostů. Co teď?

Nyní již snadno vyřešíme následující cvičení.

Cvičení. Dokažte, že $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$.

Příklad. Dokažte, že $(0, 1) \approx \langle 0, 1\rangle$.

Takové tvrzení by asi mělo platit, jak ale takovou bijekci najít? K tomu se nám hodí následující důležitá věta.

Věta. (Cantor–Bernstein) *Pokud $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq A$, pak už $A \approx B$.*

Zatím všechny množiny, se kterými jsme pracovali, byly spočetné. Nabízí se otázka, zda existuje nějaká nespočetná. To a mnohem víc říká následující věta:

Věta. (Cantor) *Množina všech podmnožin množiny A (tuto množinu značíme $\mathcal{P}(A)$) je ostře větší než A.*

Cvičení. S použitím předchozí věty dokažte, že neexistuje množina všech množin.

Tvrzení. *Platí $I \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, kde I je libovolný interval.*

Příklad. Kolik je všech posloupností reálných čísel?

Příklad. Najděte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbb{N}$ uspořádaných inkluzí.

Pro zajímavost ještě jedno zajímavé tvrzení o mohutnostech množin, jehož důkaz již není tak snadný:

Tvrzení. *Je-li A nekonečná, pak $A \times A \approx A$.*

A pro odlehčení jeden nekonečně malý rozdíl:

Úloha. Kolik je $1 - 0{,}\overline{9}$?

Úlohy

Dosti bylo teorie, pojďme se podívat na nějaké úlohy a tvrzení související s nekonečnem. V této části budeme přívlastek „nekonečný" používat ve významu „nekonečný spočetný", protože se spočetnými množinami se dá ještě celkem přirozeně a přitom korektně pracovat. Jistě vás tedy nepřekvapí, že klíčovým pojmem bude *posloupnost.*

Úloha. Ve známé úloze postavil zlý čaroděj svoje zajatce do řady, nasadil každému černý nebo bílý klobouk a nechal je odzadu tipovat jeho barvu. Kdo uhodl, byl propuštěn a zajatci si mohli na začátku domluvit strategii. Otázkou je, kolik nejvýše zajatců se mohlo s jistotou zachránit. Co kdyby zajatců bylo nekonečno, barev klobouků libovolně a museli si tipnout všichni najednou? Mohlo by se zdát, že chudáci zajatci nemají šanci. Opak je pravdou (v jistém smyslu): dokažte, že se mohou zachránit všichni až na konečně mnoho.

Úloha. Do tipovací soutěže se přihlásilo sto soutěžících. Dostali spočetně mnoho krabic, v každé nějaké reálné číslo. Každý z nich nezávisle na ostatních otevře všechny krabice až na jednu a její obsah tipne. Vymyslete strategii, se kterou se co nejvíce soutěžících jistě strefí.

Tvrzení. *Z každé posloupnosti lze vybrat monotónní podposloupnost.*

Tvrzení. (nekonečná Ramseyovka) *Když je každá hrana úplného nekonečného grafu obarvena jednou z konečně mnoha barev, existuje nekonečný jednobarevný podgraf.*

Úloha. Kolik se do roviny vejde disjunktních

(i) kružnic,
(ii) kruhů,
(iii) osmiček?

Literatura a zdroje

Pokud vás nekonečno a množiny zajímají, doporučuji se podívat na starý PraSečí seriál *Nekonečno*, který lze najít na stránce *Minulé ročníky.* Pro seriózní studium je pak ideální kniha *Teorie množin* (Balcar, Štěpánek, Academia, 1986). Několik úloh jsem převzal z příspěvku *TeMno hrátky* od Mirka Olšáka z roku 2013.