Nekonečné rady

Mirka Sotáková

Defincia 1. *Nech $\alpha = (a_n)$ je ľubovolná reálna postupnosť. Radom určeným touto postupnosťou nazývame usporiadanú dvojicu $(\alpha, s(\alpha))$, kde $s(\alpha)$ je postupnosť s n-tým členom*

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n.$$

Hovoríme, že a_n je n-tým členom radu a s_n je jeho n-tým čiastočným súčtom. Ak postupnosť (s_n) má limitu v $\mathbb{R}$, označujeme ju jedným zo spôsobov

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ a_0 + a_1 + a_2 \cdots$$

Keď postupnosť (s_n) konverguje a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, hovoríme, že rad $S(a_n)$ konverguje a má súčet s. Rozdiel $s - s_n$ nazývame n-tým zvyškom radu $S(a_n)$. Ak postupnosť (s_n) nekonverguje (nemá vlastnú limitu), potom rad diverguje.

Veta 1. *Rad $S(a_n)$ konverguje práve vtedy, keď ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, že pre ľubovolné $m,\ n,\ n_\varepsilon \leq m < n$ platí*

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| < \varepsilon.$$

Tomuto sa hovorí Cauchyho-Bolzanova podmienka konvergencie radu.

Veta 2. *Plynie z predchádzajúcej. Ak rad $S(a_n)$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Veta 3. *Ak rady $S(a_n),\ S(b_n)$ konvergujú a $c \in \mathbb{R}$, tak konvergujú aj rady $S(a_n + b_n),\ S(ca_n)$ a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Veta 4. *Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre všetky $n > n_0$ a nech rad $S(b_n)$ konverguje. Potom konverguje aj $S(a_n)$. Ak diverguje $S(a_n)$, potom diverguje aj $S(b_n)$.*

Defincia 2. *Pre každé reálne x položme*

$$x^+ = \max\{0, x\},\ x^- = \max\{0, -x\}.$$

Potom x^+, x^- nazývame kladná a záporná časť čísla x. Platí

$$x = x^+ - x^-, \ |x| = x^+ + x^-.$$

Veta 5. *Pre každú reálnu postupnosť (a_n) platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-.$$

Ak najviac jeden z radov diverguje, tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-.$$

Rad $S(|a_n|)$ konverguje práve vtedy, keď konvergujú oba rady $S(a_n^+)$, $S(a_n^-)$.

Defincia 3. *Hovoríme, že rad $S(a_n)$ absolútne konverguje, ak konverguje rad $S(|a_n|)$.*

Veta 6. *Ak konverguje rad $S(|a_n|)$, potom konverguje aj rad $S(a_n)$.*

Veta 7. *Nech (a_n) je nezáporná postupnosť, $(b_n) = (a_{\sigma(n)})$, kde σ je ľubovolná permutácia množiny $\mathbb{N}$. Potom $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Veta 8. *Nech (a_n) je reálna postupnosť, σ ľubovolná permutácia množiny $\mathbb{N}$, $(b_n) = (a_{\sigma(n)})$. Potom*

(a) Ak $S(a_n)$ absolútne konverguje, potom $S(b_n)$ absolútne konverguje a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

(b) Ak rad $S(a_n)$ má nevlastný súčet a jeden z radov $S(a_n^+)$, $S(a_n^-)$ konverguje, tak $S(b_n)$ má ten istý nevlastný súčet.

Veta 9. (Riemannova) *Majme (a_n) postupnosť, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty$. Potom pre každé $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje taká permutácia σ množiny $\mathbb{N}$, že rad $S(a_{\sigma(n)})$ má súčet r.*

Veta 10. *Ak (a_n) je reálna postupnosť, tak nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*

1. *Rad $S(a_n)$ absolútne konverguje.*
2. *Rad $S(a_n)$ konverguje pre ľubovolnú permutáciu σ množiny $\mathbb{N}$.*
3. *Rad $S(a_{k_n})$ konverguje pre každú vybranú postupnosť (a_{k_n}).*

Veta 11. *Nech (a_n) je nerastúca postupnosť nezáporných čísel a nech (a_{k_n}) je ľubovolná postupnosť vybraná z (a_n). Potom $S(a_n)$ konverguje práve vtedy, keď konver-*

guje rad $S((k_{n+1} - k_n)a_{k_{n+1}})$.

Veta 12. *Nech* (a_n) *je postupnosť kladných čísel a* (s_n) *postupnosť jej čiastočných súčtov. Potom rad* $S(a_n s_n^{-\alpha})$ *konverguje pre každé* $\alpha > 1$.

Veta 13. (Abel-Diniho) *Nech* $S(a_n)$ *je divergentný rad s kladnými členmi a* (s_n) *postupnosť jeho čiastočných súčtov. Potom* $S(a_n s_n^{-\alpha})$ *konverguje pre* $\alpha > 1$ *a diverguje pre* $\alpha \leq 1$.

Veta 14. (Diniho) *Nech* $S(a_n)$ *je konvergentný rad s kladnými členmi,* (s_n) *postupnosť jeho čiastočných súčtov a* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. *Položme* $r_0 = s$, $r_n = s - s_{n-1}$ *pre* $n \geq 1$. *Potom rad* $S(a_n r_n^{-\alpha})$ *konverguje pre* $\alpha < 1$ *a diverguje pre* $\alpha \geq 1$.

A ako teda rospoznať konvergenciu radu?

Veta 15. (Kummerovo kritérium) *Pre ľubovolné kladné postupnosti* (a_n), (b_n) *platí:*

(*a*) *Ak existuje* $d > 0$ *a* $m \in \mathbb{N}$, *tak aby pre všetky* $n \geq m$ *platilo*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq d,$$

tak rad $S(a_n)$ *konverguje.*

(*b*) *Ak rad* $(S(b_n^{-1})$ *diverguje a pre všetky* $n \geq m$ *platí*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0,$$

tak rad $S(a_n)$ *diverguje.*

Veta 16. (D'Alembertovo podielové kritérium) *Pre ľubovolnú kladnú postupnosť* (a_n) *platí:*

(*a*) *Ak existuje* $0 < q < 1$, *tak aby pre všetky dostatočne veľké* n *platilo*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

tak rad $S(a_n)$ *konverguje.*

(*b*) *Ak* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *pre všetky dostatočne veľké* n, *tak* $S(a_n)$ *diverguje.*

Veta 17. (limitná forma) *Ak*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

potom $S(a_n)$ *konverguje. Ak*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

potom rad diverguje.

Veta 18. (Cauchyho odmocninové kritérium) *Pre ľubovolný rad* $S(a_n)$ *s nezápornými členmi platí:*

(*a*) *Ak existuje* $0 < q < 1$, *tak aby pre všetky dostatočne veľké* n *platilo*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

tak $S(a_n)$ *konverguje.*

(*b*) *Ak pre nekonečne veľa* n *plati*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

tak $S(a_n)$ *diverguje.*

Veta 19. (limitná forma) *Ak*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

potom rad konverguje, ak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

tak rad diverguje.