Nekonečné množiny

Pojem nekonečna používají matematici téměř odjakživa. Vzpomeňme např. na Zénóna (asi 480 – 430) a jeho úlohu o Achillovi a želvě, či na úvahy Řeků o tom, že přímka vede na obě strany do nekonečna. Až do doby relativně nedávné však šlo výhradně o slovní spojení užívající nekonečno při popisu nějaké činnosti či vlastnosti (tzv. *potenciální* forma nekonečna) – např. „Achilles želvu *nikdy* nedohoní“, „posloupnost čísel *roste nade všechny meze*“ apod. Zato existence nekonečných souborů objektů (tzv. *aktuálního* nekonečna) nebyla diskutována, popřípadě byla z filozofických důvodů rovnou zavrhována. Dnešní (moderní) matematika však s aktuálním nekonečnem pracuje. Cílem seriálu je seznámit vás se základními principy práce s nekonečnými množinami a ukázat vám některé výsledky teorie množin, které jsou velmi zajímavé a často dosti překvapivé. Věřím, že vás nekonečno zaujme nejméně tak, jak zaujalo kdysi mě.

Proč studovat nekonečno. Již staří řečtí geometři pracovali z dnešního pohledu s nekonečnými soubory objektů. Pro ně ovšem přímka nebo rovina *nebyla* souborem bodů; byl to jeden nedělitelný geometrický objekt. O žádné nekonečné množině tedy nemohla být řeč. Tento přístup překvapivě vydržel více než 2000 let, až do 19. století.

Problémem nekonečna se v průběhu dějin zabývali někteří filozofové a teologové (Aristoteles, sv. Augustin, Tomáš Akvinský, Descartes, Spinoza, Leibnitz, Kant a další). Někteří ho byli ochotni přijmout, jiní ho horlivě zavrhovali. Na matematický pohled na věc však bylo třeba ještě dlouho počkat.

Od dob Gottfrieda Leibnitze (1646 – 1716) a Isaaca Newtona (1642 – 1727) se rozvíjela matematická analýza (studium reálných funkcí), založená na infinitesimálním počtu, čili počítání pomocí nekonečně malých a nekonečně velkých veličin. Až do začátku 19. století byly řešeny základní úlohy, které si s potenciálním nekonečnem a s geometrickou představou reálných čísel jako přímky vystačily. Ještě Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) pravil: *„Nekonečno nelze v matematice použít jako něco definitivního, je to jen způsob vyjádření, který označuje jistou hranici, k níž se některé veličiny mohou libovolně blížit, pokud jiné veličiny rostou neomezeně.“* (Což je, mimochodem, docela pěkná definice potenciálního nekonečna.)

V 19. století však přibyly problémy týkající se značně složitých částí reálné přímky, např. při vyšetřování definičních oborů funkcí vzniklých jako limita posloupnosti funkcí. Bylo třeba rozbít přímku na body a z těchto bodů sestavovat množiny. Pojem *množina* se poprvé vyskytl u pražského matematika Bernarda Bolzana (1781 – 1848). Ten jako první zkoumal nekonečné množiny reálných čísel. Šlo o velký zlom, neboť všichni Bolzanovi předchůdci používali nekonečno jen v jeho potenciální formě. Bolzanova kniha však nevzbudila velký ohlas. Až v roce 1873 se problémům nekonečných množin (motivován opět analýzou) začal věnovat Georg Cantor (1845 – 1918). Vzhledem k tomu, že mezitím byla vypracována moderní teorie reálných čísel (založená na zúplnění čísel racionálních), začínala se rýsovat i praktická aplikace jeho výsledků.

G. Cantor je považován za zakladatele moderní *teorie množin*. Vypracoval v letech 1873 – 1897 sérii prací, kde rozvinul metody zacházení s nekonečnými množinami. Objevil několik překvapivých faktů, které řada soudobých matematiků dlouho odmítala; některé si v seriálu ukážeme. Na přelomu 19. a 20. století se ale začaly objevovat skutečné paradoxy (lépe řečeno spory) v Cantorově pojetí teorie množin. Ač se velmi snažil je odstranit, do konce jeho života se to nepovedlo ani jemu, ani nikomu jinému. Říká se, že následkem všeobecného odporu proti

své životní teorii zemřel v psychiatrické léčebně. Problémy teorie množin byly odstraněny až mnohem později, díky moderní logice a tzv. axiomatickému přístupu k teorii množin.

Ponechme však zatím moderní trendy stranou, vrátíme se k nim krátce v závěru seriálu. Nyní si předvedeme původní Cantorovy výsledky, které jsou samy o sobě v pořádku. Na problémy včas upozorníme, abychom neskončili jako on.

Cantorova diagonální metoda. Jedním z prvních překvapivých výsledků, které G. Cantor publikoval, byl fakt, že *reálných čísel je více než přirozených*. Formálně řečeno, není možné vzájemně jednoznačně přiřadit každé reálné číslo k nějakému číslu přirozenému. Čili nelze reálná čísla „očíslovat“ přirozenými čísly. Zajímavý je nejen výsledek, ale nesmírně důležitá je i použitá metoda, v logice a teorii množin často užívaná.

Důkaz. Předpokládejme, že $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost, která obsahuje všechna reálná čísla z intervalu $(0,1)$. Jak známo, každé reálné číslo $r \in (0,1)$ lze napsat v desítkovém rozvoji jako $r = 0{,}r_1r_2r_3\ldots$ Máme tedy

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}\boxed{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\\
a_2 &= 0{,}a_{21}\boxed{a_{22}}a_{23}a_{24}\ldots\\
a_3 &= 0{,}a_{31}a_{32}\boxed{a_{33}}a_{34}\ldots\\
a_4 &= 0{,}a_{41}a_{42}a_{43}\boxed{a_{44}}\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Nyní sestrojíme reálné číslo $b \in (0,1)$, které není v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$, čímž dostaneme spor s volbou této posloupnosti. Položme pro každé i přirozené $b_i = 1$, pokud $a_{ii} \neq 1$, a $b_i = 2$, pokud $a_{ii} = 1$. Máme tedy $b_i \neq a_{ii}$, díky čemuž číslo $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ nemůže být rovno žádnému a_i, neboť se od něj liší v i-té číslici v jeho desetinném rozvoji.

Neexistuje tedy ani posloupnost, která by obsahovala všechna reálná čísla, neboť taková by měla podposloupnost obsahující všechna reálná čísla z intervalu $(0,1)$.

Úloha, kterou v důkazu hrály diagonální prvky a_{ii}, je důvodem, proč se metodě říká *diagonální*. Nesetkáváme se s ní naposledy.

Důsledek. *Existují (co do velikosti) různá nekonečna.*

Poznamenejme, že už s touto překvapivou skutečností se řada Cantorových současníků těžko vyrovnávala, neboť naprosto nezapadala do tehdejší vžité představy nekonečna potenciálního.

Terminologie. Odpusťte jeden technický odstavec. Žádný delší matematický text se neobejde bez terminologie, která zjednodušuje a zpřesňuje vyjadřování. Většinu následujících pojmů již asi znáte, některé však budou nové.

Kartézský součin množin A, B je množina $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$ všech uspořádaných dvojic prvků $a \in A$ a $b \in B$. Dále značíme $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ množinu všech uspořádaných n-tic prvků z množiny A.

Zobrazení $f : A \to B$ je podmnožina kartézského součinu $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ s vlastností $(a,b) \in f$. Prvek b se pak značí $f(a)$ a f je tedy množina všech dvojic $(a, f(a))$, $a \in A$. (Srovnejte s intuitivní definicí zobrazení jako předpisu, který každému prvku množiny A přiřadí nějaký prvek množiny B.)

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, pak $g \circ f : A \to C$ je zobrazení definované předpisem $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $a \in A$.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *prosté*, pokud různým $a_1, a_2 \in A$ přiřadí různé hodnoty, tj. pokud platí $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *surjektivní* (též *na*), pokud pro každé $b \in B$ existuje vzor v A, tj. existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *bijekce* (též *vzájemně jednoznačné*), pokud je prosté a na, tj. pro každé $b \in B$ existuje právě jedno $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.

Očíslováním množiny A pomocí množiny I rozumíme bijekci $f : I \to A$. Prvky množiny A pak značíme a_i, $i \in I$, přičemž $a_i = f(i)$. Obvykle používáme v případě $I = \mathbb{N}$, kdy je očíslování množiny A totéž jako seřazení prvků množiny A do posloupnosti.

Je-li A množina, označíme $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ množinu všech podmnožin A; nazýváme ji *potenční množinou* A. Píšeme-li $X \subset A$, myslíme tím $X \subseteq A$ a zároveň $X \neq A$.

Porovnávání velikostí množin. Jak poznáme, která množina je větší? Přiřadíme k sobě (vzájemně jednoznačně) jejich prvky, načež nám buď nic nezbyde – pak jsou stejně velké, nebo nám v některé z nich něco zbyde – a ta je větší. Z toho vycházejí následující definice.

Řekneme, že množina A má *nejvýše tolik prvků jako* množina B, pokud existuje prosté zobrazení $f : A \to B$; tuto skutečnost značíme $A \preceq B$. Řekneme, že množiny A a B jsou *stejně velké* (mají stejně prvků), pokud existuje bijekce $f : A \to B$; značíme $A \approx B$. Řekneme, že množina A má *méně prvků* než množina B, pokud $A \preceq B$ a $A \not\approx B$; zkráceně zapisujeme $A \prec B$. Zatím ponecháme stranou, co to vlastně ten *počet prvků* množiny je.

Množiny dělíme podle velikosti následujícím způsobem:

(1) *Konečné* nazýváme ty, které lze očíslovat čísly $1, \ldots, n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, a množinu prázdnou. Tedy ty, které jsou stejně velké jako některá z množin $\{1, \ldots, n\}$ nebo $\emptyset$. Ostatní množiny se nazývají *nekonečné*.
(2) *Spočetné* nazýváme ty, které lze očíslovat množinou všech přirozených čísel. Tedy ty, které jsou stejně velké jako $\mathbb{N}$. Ostatní nekonečné množiny se nazývají *nespočetné* (např. $\mathbb{R}$, jak jsme již ukázali).
(3) Je-li A nespočetná množina, která je stejně velká jako $\mathbb{R}$, říkáme, že A má *mohutnost kontinua*.

Rozmyslete si, že má-li množina A velikost menší než $\mathbb{N}$, pak už je konečná. Tedy žádná nekonečná množina menší než spočetná neexistuje.

Základní vlastnosti $\prec, \approx$. Velikosti množin definované výše splňují několik „samozřejmých“ vlastností. Zkuste si je sami dokázat s použitím níže uvedeného návodu!

(1) *$A \approx A$.*
(2) *Pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$.*
(3) *Pokud $A \approx B$, $B \approx C$, pak $A \approx C$.*
(4) *Pokud $A \preceq B$, $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.*
(5) *Pokud $A \approx B$, pak $A \preceq B$ a $B \preceq A$.*
(6) *Pokud $A \subseteq B$, pak $A \preceq B$.*
(7) *$A \preceq B$ právě tehdy, když existuje surjektivní zobrazení $B \to A$.*

Idea důkazu.

(1) Identické zobrazení $\mathrm{Id} : A \to A$ je bijekce.
(2) Je-li $f : A \to B$ bijekce, pak $f^{-1} : B \to A$ je také bijekce.