Nekonečně malá čísla

Tonda Češík

Abstrakt. Ukážeme si tzv. nestandardní model reálných čísel. Ten umožňuje mluvit o nekonečně malých a nekonečně velkých číslech, pomocí kterých lze definovat pojmy jako limita a spojitost přímočařeji a intuitivněji. Standardně se tento model nepoužívá, protože ačkoli je v jistých pohledech intuitivní, může svádět k nekorektnímu zacházení. Tomuto nestandardnímu modelu se říká *hyperreálná čísla*.

Pokud ses již setkal(a) např. s definicí spojitosti funkce, možná Tě napadla následující myšlenka: „Vždyť jde vlastně jen o to, že když jsme blízko bodu a, tak funkční hodnota je blízko funkční hodnotě v a. Není tedy ta definice *Pro každé ε existuje δ atd.* zbytečně kostrbatá? Nešlo by to říct nějak jednodušeji?“ Odpověď je, že šlo, ale člověk si musí dávat pozor.

Trocha historie

V dobách počátku infinitezimálního počtu, tedy za dob Newtona a Leibnize, se zaujímal vcelku intuitivní přístup k problematice: *Když chci být hodně blízko, tak prostě budu nekonečně blízko.* Od začátku však tento přístup vypadal trochu podezřele. Časem si matematici uvědomili, že existenci *infinitezimálních veličin*[1], nemají nijak logicky odůvodněnou. Proto se namísto toho začala rozvíjet moderní teorie využívající epsilon-delta definice, a na tomto základu se matematická analýza staví dodnes. Od používání nekonečně malých čísel se tak na dlouhou dobu upustilo a byly považovány za nefungující slepou uličku. V šedesátých letech minulého století si však Abraham Robinson uvědomil, že nekonečně malá čísla vskutku lze zavést rigorózně. Dal tak vzniknout novému oboru pod názvem *Nestandardní analýza.*

Jdeme na to

Základní myšlenkou je, že začneme s nám známým *standardním* univerzem $\mathcal{U}$, obsahujícím reálná čísla $\mathbb{R}$, množiny v $\mathbb{R}$, funkce a relace v $\mathbb{R}$. Toto univerzum obohatíme o nekonečně malá a nekonečně velká čísla tím, že ho rozšíříme na univerzum $\mathcal{U}'$ pomocí operace $^*\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$, přiřazující objektu $\alpha \in \mathcal{U}$ odpovídající objekt $^*\alpha \in \mathcal{U}'$. Zvětšit ho pochopitelně nechceme nějak libovolně, ale tak, aby se zachovaly jeho

[1] Neboli nekonečně malých čísel.

původní vlastnosti, a tedy platila stejná tvrzení. To nám zařídí Princip transferu, ale abychom ho mohli formulovat, potřebujeme nejprve (pro naše potřeby ne úplně formálně) říci, co vlastně myslíme tím „tvrzením“.

Definice. *Formule* je konečný syntakticky korektní zápis tvořící logický celek v tom smyslu, že je možné uvažovat o jeho pravdivosti. Tedy je možné jednotlivé formule spojovat logickými spojkami. Formule může obsahovat:

(1) konstanty (označující objekty z $\mathcal{U}$),
(2) logické operátory ($\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $=$, $\dots$),
(3) množinové symboly $\in$, $\mathcal{P}$,
(4) proměnné (zastupující objekty v $\mathcal{U}$),
(5) kvantifikátory, pro naše účely výlučně ve tvaru $(\forall x \in \tau)$ nebo $(\exists x \in \tau)$, kde τ je konstanta nebo proměnná.

Sentence je formule, kde jsou všechny proměnné vázány kvantifikátory.

Příklad. Zápis $1 + 1$ není formule. Například $x = 5$ či $(\exists z \in \mathbb{R})(w \cdot z = 7)$ jsou formule, ale ne sentence. Sentence jsou například $1 + 1 = 2$ či $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$.

Za sentence můžeme pokládat i věty v běžném jazyce, pokud víme, že je lze přepsat do požadovaného tvaru. Takže například větu „Každá konečná množina reálných čísel má minimum.“ lze považovat za sentenci.

Definice. Pro formuli φ definujeme formuli ${}^*\varphi$ tak, že v ní každou konstantu α nahradíme ${}^*\alpha$. Vše ostatní zůstává.

Axiom. (Princip transferu) *Sentence φ platí v $\mathcal{U}$, právě když sentence ${}^*\varphi$ platí v $\mathcal{U}'$.*

Příklad. Použijeme-li Princip transferu na dvě sentence platné v $\mathcal{U}$, dostaneme tak sentence platné v $\mathcal{U}'$:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad & (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y + x), \\ \text{Transfer} \to {}^*\varphi\colon \quad & (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(x \mathbin{{}^*{+}} y = y \mathbin{{}^*{+}} x). \\ \psi\colon \quad & (\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(x \cdot y = 1)), \\ \text{Transfer} \to {}^*\psi\colon \quad & (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \neq {}^*0 \Rightarrow (\exists y \in {}^*\mathbb{R})(x \mathbin{{}^*{\cdot}} y = {}^*1)). \end{aligned}$$

Tímto axiomem jsme zařídili, že rozšíření $\mathcal{U}'$ neporuší vlastnosti $\mathcal{U}$. Jak je vidět v příkladu, hvězdičkování všeho může vypadat trochu krkolomně, a tak přijmeme úmluvu, že hvězdičku budeme vynechávat u konstant z $\mathbb{R}$, funkcí a relací na $\mathbb{R}$. Tedy například budeme psát 1 místo ^{*1}, $\sin$ místo ${}^*\sin$, $<$ místo ${}^*<$, ale hvězdičku u ${}^*\mathbb{R}$ pochopitelně psát budeme. V tomto smyslu tedy můžeme uvažovat $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

Zatím jsme ale vůbec nezaručili, že nám operace * něco přidá. To zařídíme druhým axiomem, díky kterému nám * každou nekonečnou množinu zvětší.

Axiom. (Princip rozepnutí) *Pro každou nekonečnou množinu A v $\mathcal{U}$ platí $A \subsetneq {}^*A$.*

Množinu ${}^*\mathbb{R}$ budeme nazývat množinou *hyperreálných čísel*, množina ${}^*\mathbb{N}$ je množina *hyperpřirozených čísel.*

Důsledek. *Existují nekonečně malá a nekonečně velká hyperreálná čísla.*

Definice. Číslo $x \in {}^*\mathbb{R}$ se nazve

(1) *nekonečně malé*, pokud pro každé standardní kladné reálné ε (tj. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$) platí $|x| < \varepsilon$,
(2) *omezené*, pokud existuje $C \in \mathbb{R}_+$ takové, že $|x| \le C$,
(3) *nekonečně velké*, pokud $|x| > C$ pro každé $C \in \mathbb{R}_+$.

Řekneme, že x je *nekonečně blízko* k y, pokud $x - y$ je nekonečně malé. Zapisujeme $x \approx y$.

Tvrzení. (vlastnosti $\approx$) *Pro hyperreálná čísla $a, b, c, d \in {}^*\mathbb{R}$ platí:*

(1) $a \approx b \;\&\; b \approx c \Rightarrow a \approx c$,
(2) $a \approx c \;\&\; b \approx d \Rightarrow a + b \approx c + d$,
(3) $a \approx 0 \;\&\; b$ *je omezené* $\Rightarrow a \cdot b \approx 0$.

Trocha nestandardní analýzy

Definice. Pro omezené hyperčíslo $x \in {}^*\mathbb{R}$ definujeme *standardní část* $\operatorname{st} x = x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je to jediné (standardní) reálné číslo splňující $x \approx x_0$. (Takové číslo existuje, protože reálná čísla jsou *úplná*.)

Definice. Řekneme, že posloupnost relaných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* $a \in \mathbb{R}$, pokud pro všechny nekonečně velké indexy N platí $a_N \approx a$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá*, pokud pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a $y \in {}^*\mathbb{R}$ takové, že $y \approx x$, platí i $f(y) \approx f(x)$.

Definice. Říkáme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá*, pokud pro libovolnou dvojici reálných hyperčísel $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ platí $x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y)$.

Úloha. (Bolzanova věta) Spojitá funkce f někde nabývá záporné hodnoty, někde jinde kladné. Dokažte, že pak někde nabývá nuly.

Úloha. (Weierstrassova věta) Dokažte, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maximální hodnoty.

Úloha. Jsou dány dvě funkce $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující pro libovolné reálné x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$

$$f(x,0) < 0, \quad g(0,x) < 0, \quad f(x,1) > 0, \quad g(1,x) > 0.$$

Dokažte, že pak existují reálná čísla x, y taková, že $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Konstrukce hyperreálných čísel

Doposud jsme zaujímali axiomatický přístup – tedy zavedli jsme si dva axiomy, které mají hyperreálná čísla splňovat. Je ale možné k tomu přistoupit i konstrukčně a hyperreálná čísla si „vyrobit“ z reálných. Myšlenka je následující: Nekonečně malé nenulové číslo budeme reprezentovat posloupností nenulových reálných čísel blížících se k nule.

Tedy hyperreálné číslo a pro nás bude posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$. Operace budeme definovat po složkách, tedy

$$a + b = (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$

a podobně pro násobení. Reálná čísla ztotožníme s konstantními posloupnostmi, tedy $x \in \mathbb{R}$ ztotožníme s posloupností $(x, x, x, \dots)$.

Aby tato myšlenka fungovala, je potřeba se ještě zbavit technického úskalí, kvůli kterému se posloupnosti nechovají jako reálná čísla (není splněn princip transferu). Například, v reálných číslech platí: pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ je $x \cdot y \neq 0$. To pro naše posloupnosti neplatí, protože

$$(1, 0, 1, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 1, \dots) = (0, 0, 0, 0, \dots).$$

Také není vůbec jasné, jak posloupnosti porovnávat, tedy jak rozhodnout, která z dvou posloupností je větší. Problém vyřešíme tak, že nás budou zajímat prvky jen na některých pozicích. Přesněji řečeno, budou nás zajímat prvky na velké množině indexů. Proto všechny množiny přirozených čísel rozdělíme na *malé* a *velké* tak, aby platilo následující.

(1) Každá jednoprvková množina $\{n\}$ je malá, prázdná množina je malá.
(2) Pokud $A, B \subset \mathbb{N}$ jsou obě velké, pak $A \cap B$ je velká.
(3) Pokud $A \subset \mathbb{N}$ je velká a $A \subset B \subset \mathbb{N}$, pak B je velká.
(4) Pro každou $A \subset \mathbb{N}$ je jedna z dvou množin A, $\mathbb{N} \setminus A$ velká (a tedy ta druhá je malá).

Fakt. (existence netriviálního ultrafiltru na $\mathbb{N}$) *Podmnožiny $\mathbb{N}$ takto rozdělit lze.*

Nyní tedy dvě hyperčísla $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$, $b = (b_i)_{i=1}^{\infty}$ prohlásíme za totožná, pokud $\{i \in \mathbb{N} : a_i = b_i\}$ je velká množina. Tím se vyřeší náš problém s násobením, protože pokud $a \cdot b$ je 0, pak nutně a nebo b má nuly na velké množině indexů.

Dále nám to umožní každá dvě hyperčísla porovnat. Máme totiž rozklad $\mathbb{N}$ na tři disjunktní množiny

$$\{i \in \mathbb{N} : a_i < b_i\}, \quad \{i \in \mathbb{N} : a_i = b_i\}, \quad \{i \in \mathbb{N} : a_i > b_i\},$$

z nichž je (díky vlastnostem velkých množin) právě jedna velká. Podle toho, která je velká, rozhodneme, jestli $a < b$, $a = b$, nebo $a > b$.

Ve skutečnosti jsme touto konstrukcí zařídili, že oba požadované axiomy jsou splněny, a opravdu jsme tak zkonstruovali hyperreálná čísla.

Literatura a zdroje

[1] Abraham Robinson: *Non–Standard Analysis*, 1966.
[2] Dalibor Pražák: *NMMA574 Vybrané kapitoly z teorie dynamických systémů*, přednáška MFF UK, letní semestr 2016/2017.
[3] Mirek Olšák: *Hyperčísla*, Oldřichov, 2012.