# Neeukleidovská geometrie

Háňa Bendová

Abstrakt. Přednáška se zabývá historií vzniku neeukleidovské geometrie, geometrií na křivých plochách, sférickou a hyperbolickou geometrií a jejich souvislostí se součtem velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku. Tento příspěvek je pouze velmi stručným shrnutím některých částí přednášky a není zamýšlen jako plnohodnotný studijní materiál.

Kolem roku 300 př. n. l. popsal Eukleides ve svém slavném díle *Základy* pět základních axiomů geometrie. Ten poslední, tzv. pátý Eukleidův postulát, měl zásadní vliv na další vývoj geometrie.

**Axiom rovnoběžnosti (pátý Eukleidův postulát):** Každým bodem $B$, který neleží na přímce $p$, lze vést právě jednu přímku $p'$, která neprotíná $p$.

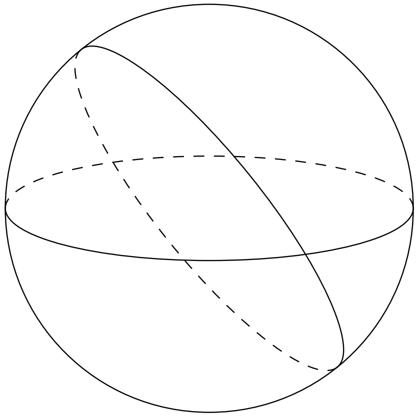
Dlouhá staletí se jej matematici bezúspěšně snažili dokázat z předchozích čtyř, což nakonec vedlo k objevu neeukleidovské geometrie – takové, která stojí na prvních čtyřech Eukleidových axiomech a předpokládá, že ten pátý neplatí. Podle toho, jakým způsobem pátý axiom popřeme, rozlišujeme dva základní typy neeukleidovské geometrie – sférickou a hyperbolickou.

**Sférický axiom:** Neexistuje žádná přímka vedená bodem $B$, která neprotíná $p$.

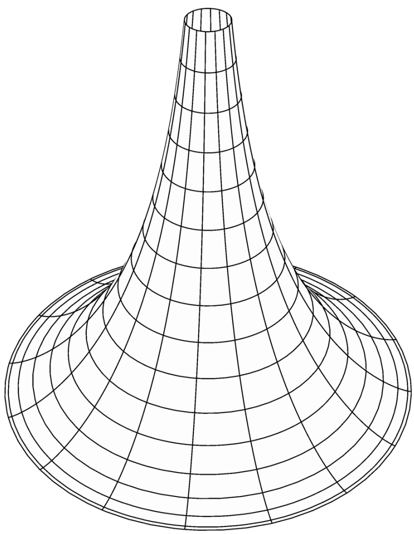
**Hyperbolický axiom:** Existují nejméně dvě různé přímky vedené bodem $B$, které neprotínají $p$.

Názvy „sférická“ a „hyperbolická“ vychází z toho, jaký mají tyto geometrie model. Tím je nějaká (v těchto případech křivá) plocha, na kterou se dají vhodným způsobem kreslit geometrické objekty tak, že splňují příslušné axiomy. Nejjednodušším modelem sférické geometrie je povrch koule (sféra), kde přímky jsou „velké“ kružnice (průniky sféry s rovinami, které procházejí jejím středem). Hyperbolickou geometrii lze kreslit například na tzv. pseudosféru.

Klíčová slova. neeukleidovská geometrie, sférická geometrie, hyperbolická geometrie, Lobačevského geometrie, pseudosféra



Sféra (se dvěma přímkami)



Pseudosféra

## Souvislost se součtem úhlů v trojúhelníku

Jednou ze základních vět eukleidovské geometrie je ta, která říká, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Tento výsledek je ve skutečnosti ekvivalentní axiomu rovnoběžnosti. V neeukleidovské geometrii se tedy součet úhlů v trojúhelníku liší od 180°. Označme

$$E(T) = \text{součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka } T - 180^\circ$$

tzv. úhlovou výchylku trojúhelníka $T$. Pánové C. F. Gauss a J. H. Lambert nezávisle studovali úhlovou výchylku v obou zmiňovaných geometriích a podařilo se jim zjistit následující:

- Ve sférické geometrii je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku větší než 180°, tj. $E > 0$.
- V hyperbolické geometrii je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku menší než 180°, tj. $E < 0$.

Navíc zjistili, že úhlová výchylka trojúhelníku $T$ je určena jeho obsahem, konkrétně

$$E(T) = kS(T),$$

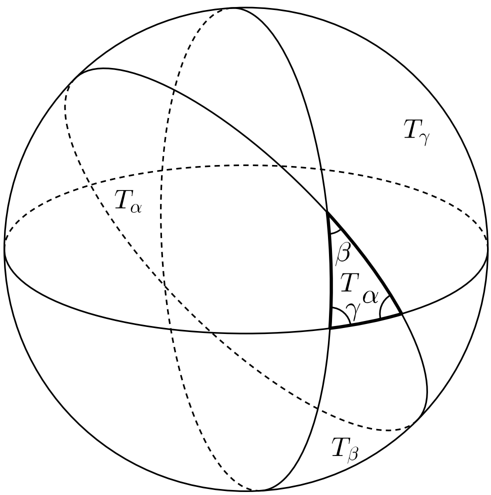
kde $k$ je nějaká konstanta, která je kladná ve sférické geometrii a záporná v hyperbolické geometrii. Ukážeme si, jak to dokázat pro trojúhelníky na sféře.

**Tvrzení.** *Pro trojúhelník $T$ na sféře o poloměru $R$ platí*

$$E(T) = kS(T),$$

*přičemž $k = 1/R^2$.*

*Důkaz.* Prodloužíme hrany trojúhelníka $T$ na velké kružnice, čímž obdržíme celkem 8 trojúhelníků – trojúhelníky $T$, $T_\alpha$, $T_\beta$, $T_\gamma$ a jejich protilehlé obrazy (viz obrázek).



Protože povrch sféry je roven $4\pi R^2$, dostáváme

$$S(T) + S(T_\alpha) + S(T_\beta) + S(T_\gamma) = 2\pi R^2. \tag{1}$$

Na druhou stranu trojúhelníky $T$ a $T_\alpha$ dohromady tvoří srpek o obsahu rovném $(\alpha/2\pi)$ krát povrch celé sféry. Tedy

$$S(T) + S(T_\alpha) = 2\alpha R^2.$$

Podobně

$$S(T) + S(T_\beta) = 2\beta R^2,$$

$$S(T) + S(T_\gamma) = 2\gamma R^2.$$

Dohromady

$$3S(T) + S(T_\alpha) + S(T_\beta) + S(T_\gamma) = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2.$$

Odečtením této rovnice od (1) dostáváme

$$S(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2,$$

jinými slovy

$$E(T) = kS(T), \quad \text{kde} \quad k = \frac{1}{R^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

## Literatura a zdroje

[1] Tristan Needham: *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1997