

Nebojíme se geometrie

DAVID HRUŠKA

ABSTRAKT. V úvodu příspěvku je uvedeno několik známých úloh, jejichž řešení ilustruje základní techniky rovinné geometrie, jako jsou například úhlení nebo mocnost. Zbytek tvoří pseudonáhodný výběr pěkných a geometrických úloh různých obtížností, na jejichž řešení nejsou potřeba hluboké znalosti.

Nejprve si svižně projedeme několik typických „provarů“, které je dobré znát, a pak se pustíme do řešení vesměs náhodných úloh. Budeme se snažit úlohy nejen vyřešit, ale i uvědomit si, proč naše řešení vede zrovna touto cestou. Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

Výzva. Kreslete si (co nejhezčí) obrázky! Často je daleko těžší přijít na to, co v obrázku platí, než to pak dokázat.

Základní vzdělání

Tvrzení. (Mocnost) *Dokažte, že spojnice průsečíků dvou protínajících se kružnic pól jejich společnou tečnu (jakožto úsečku danou body dotyku).*

Tvrzení. (Bod Š) *Je dán trojúhelník ABC . Průsečík $\check{S}_a$ osy vnitřního úhlu u A a osy BC leží na kružnici opsané a je středem kružnice $BICE_a$, kde I a E_a jsou postupně vepsíště a A -přípsíště. Navíc $|\check{S}_a I| = |\check{S}_a C|$.*

Tvrzení. (Shooting lemma) *Je dána tětiva BC kružnice k a střed jejího oblouku $\check{S}_a$. Jím procházející přímky p, q protnou přímku BC a kružnici k ve čtyřech bodech ležících na jedné kružnici.*

Tvrzení. (Equal tangents) *Body dotyku kružnice vepsané a připsané se stranou trojúhelníka jsou symetrické podle jejího středu.*

Kolik úloh dáte?

Úloha 1. *Vnější společné tečny dvou neprotínajících se kružnic se jich dotýkají ve vrcholech rovnoramenného lichoběžníku. Dokažte, že jeho úhlopříčka vytíná na obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.*

Úloha 2. Mějme trojúhelník ABC s obvodem 4. Na polopřímkách AB a AC označme postupně body X, Y tak, že $|AX| = |AY| = 1$ a úsečky BC a XY se protínají v bodě M . Dokažte, že alespoň jeden z trojúhelníků ABM, ACM má obvod 2.

Úloha 3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Na stranách AB a AC zvolíme po řadě body M, N . Kružnice s průměry BN a CM se protínají v bodech P a Q . Dokažte, že body P, Q a ortocentrum H trojúhelníka ABC leží na přímce.

(KMS 2003)

Úloha 4. Dokažte, že kolmiště je středem kružnice vepsané trojúhelníku s vrcholy v patách výšek.

Úloha 5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD , M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC . Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

(MO 53–III–4)

Úloha 6. Ve čtverci $ABCD$ označme M střed strany AB . Kolmice na MC procházející bodem M protíná stranu AD v bodě K . Ukažte, že $|\angle BCM| = |\angle KCM|$.

Úloha 7. V trojúhelníku ABC se vepsaná kružnice dotýká strany BC v bodě D . Přímka $\check{S}_a D$ protne opsanou v bodě X . Dokažte, že $|\angle IXA| = 90^\circ$, kde I je vepisště trojúhelníka ABC .

Úloha 8. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\angle PAB| = |\angle BCA|$ a $|\angle CAQ| = |\angle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ , přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN . Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

(IMO 2014)

Úloha 9. Na straně BC ostroúhlého trojúhelníka ABC s kolmištěm H je dán bod D . Kolmice na DH vedená bodem H protne strany AB, AC v bodech F, E . Dokažte, že

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|FH|}{|HE|}.$$

(Polsko)

Úloha 10. Úhlopříčky tětiového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě P . Označme K, L paty kolmic z P na AB, CD a dále buď M střed strany AD . Dokažte, že $|MK| = |ML|$.

(USA TST 2000)

Úloha 11. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ svírá spojnice středu stran BC a AD stejný úhly s oběma úhlopříčkami. Dokažte, že tyto úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

(ARO 1990)

Úloha 12. V trojúhelníku ABC označme A_0 patu výšky z vrcholu A . Ukažte, že paty kolmic vedených z bodu A_0 na zbylé strany trojúhelníka a zbylé výšky leží v přímce.

Úloha 13. Úhlopříčky AC a BD tětívového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P . Středů kružnic opsaných $ABCD$, ABP , BCP , CDP a DAP označme postupně O , O_1 , O_2 , O_3 a O_4 . Ukažte, že OP , O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem.

Úloha 14. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$. Označme D , E a F průsečíky os úhlů se stranami BC , AB , AC . Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90^\circ$.

Úloha 15. Na straně AB pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$ ($AD \parallel BC \perp AB$) zvolíme bod X tak, aby $\sphericalangle CXD$ byl pravý. Dokažte, že se kolmice na CX skrz B a kolmice na DX skrz A protínají na CD .

Návody

1. Dokreslete chordálu kružnic.
2. Dokreslete připsanou kružnici k ABC a kružnici se středem v A a nulovým poloměrem.
3. Thaletovka a mocnost.
4. Vyúhlete.
5. Vyúhlete. Lépe se přenáší ty úhly, které mají na kružnici opsané čtverci svoji tětivu.
6. Najděte tětívák.
7. Dokažte $\sphericalangle \check{S}_a ID = \sphericalangle \check{S}_a XI$. Použijte vlastnosti bodu $\check{S}$ a Shooting lemma.
8. Dokreslete středy AB a AC a těžnicemi vyrobte podobné trojúhelníky
9. Na polopřímce BH naneste X , aby $|BH|/|HX| = |BD|/|DC|$, a odhalte kolmíště.
10. Středů PA a PD , jakožto středy přepon pravoúhlých trojúhelníků, vůbec nejsou špatné body.
11. Dokreslete střed AB .
12. Vyúhlete, že tři z daných bodů leží v přímce.
13. Odhalte rovnoběžníky a dokažte, že tam opravdu jsou.
14. Čím je E vůči ADC ?
15. Využijte obdélník a jen ověřte nějaký poměr.

Zdroje

- [1] Pepa Tkadlec: *Dokreslování*, Horní Lysečiny, 2013

Dále jsem čerpal z různých soutěží.