

Nalieváreň z geometrie

Káťa Fišerová & Rasťo Olhava

Úvod

Geometria je neoddeliteľnou a krásnou súčasťou matematiky. Jej krása spočíva v tom, že na vyriešenie väčšiny úloh stačí poznať pár základných myšlienok. Napriek tomu je často postrachom riešiteľov. Riešenie úloh z geometrie nie je činnosť, ktorá sa dá naučiť, ale dá sa dostatočne precvičiť, a preto Vám prinášame našu nalieváreň z geometrie. Na našej prednáške, ktorá bude vlastne cvičením, sa síce nedozviete nič nové, ale za to si budete môcť dôkladne precvičiť riešenie úloh z planimetrie.

Trojuholník obyčajný

Veta 1. (kosínusová alebo špeciálne Pythagorova) *V trojuholníku s klasickým značením platí*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Veta 2. (Menelaova) *Daný je trojuholník ABC a priamka p , ktorá neprechádza žiadnym jeho vrcholom, ale pretína priamky AB , BC , AC postupne v bodoch K , L , M . Potom platí*

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Veta 3. (Cevova) *Daný je trojuholník ABC a na jeho stranách AB , BC , CA sú po rade body K , L , M a zároveň platí*

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Potom priamky CK , AL , BM prechádzajú jedným bodom.

Trojuholník pravouhlý

Opäť používame klasické označenie, pričom pravý uhol je pri vrchole C .

Veta 4. (Tálesova) *V strede prepony leží stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku.*

Veta 5. (Euklidove) *Označme S päťu výšky spustenej z vrcholu C , potom platí*

$$|SC|^2 = |SA| \cdot |SB|,$$

$$|BC|^2 = |AB| \cdot |SB|,$$

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |SA|.$$

Takto by sme mohli pokračovať ešte dlho, pretože toto bola iba vzorka vedomostí, ktoré sa využívajú pri riešení klasických úloh z planimetrie. Pre úplnosť ešte spomenieme ďalšie objekty a myšlienky, ktoré sa často využívajú a je dobré čo to o nich vedieť. Sú to kružnice vpísané, opísané, pripísané, Feuerbachové, Simpsonová priamka, Eulerová priamka, podobnosť a zhodnosť trojuholníkov, obvodové a stredové uhly, súmernosti, zobrazenia a ich skladanie (osová s., stredová s., rotácia, posunutie, rovnofahlosť), tetivový štvoruholník, dotyčnicový štvoruholník.

Rady

- Kresli si *veľké obrázky*.
- Neboj sa *tipnúť si výsledok* a over si ho viacerými *presnými obrázkami*.
- Odmeriavaj, *hľadaj rovnaké uhly a úsečky*.
- Dvakrát premysli, až potom píš.
- Uvedom si, čo chceš a čo si zo zadania *ešte nepoužil*.

Úlohy

A na záver vzorka úloh, s ktorými sa stretnete na cvičení:

Úloha 1. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblúk AC kružnice, ktorej stred leží na strane AB , pretína stranu CD v bode M . Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé.

Úloha 2. V rovine je daný tupý uhol AKS . Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS , aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC .

Úloha 3. Majme štvoruholník $ABCD$ s na seba kolmými uhlopriečkami. Označme stredy Feuerbachových kružníc trojuholníkov ABD , ABC , BCD a CDA po rade E , F , G a H . Ukážte, že priesečník uhlopriečok štvoruholníka $EFGH$ leží v ťažisku štvoruholníka $ABCD$.