Náhodné procházky

Šárka Štěpánová

Zavedení pojmů

Nejdříve si zavedeme několik základních pojmů teorie pravděpodobnosti, nebudeme je však přesně definovat (definice lze najít v každé základní literatuře), jen si řekneme, co znamenají, používat je budeme vždy v souladu s intuicí.

(1) *pravděpodobnost*: viz intuice
(2) *jev*: něco, co se buď stane, nebo ne
(3) *úplný systém jevů*: takové jevy, že při daném pokusu vždy musí nastat právě jeden z nich
(4) *podmíněná pravděpodobnost* $P(A|B)$: pravděpodobnost, že nastane jev A, víme-li, že nastal jev B
(5) *náhodná veličina* X: X je výsledek pokusu (např. kolik ok padlo na kostce)
(6) *střední hodnota* $\mathbf{E}X$: průměrná hodnota náhodné veličiny (např. při házení kostkou je $\mathbf{E}X = 3.5$),

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i),$$

kde X je náhodná veličina, která nabývá hodnot X_i, kde $i = 1, \ldots, n$.
(7) *podmíněná střední hodnota*: (X je náhodná veličina jako výše)

$$\mathbf{E}(X|B) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i|B).$$

A ještě dvě tvrzení:

Věta. (o úplné pravděpodobnosti) *Mějme úplný systém jevů $\{B_j, j = 1, \ldots, m\}$, pak platí*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A|B_j) \cdot P(B_j).$$

Věta. (o úplné střední hodnotě) *Mějme úplný systém jevů $\{B_j, j = 1, \ldots, m\}$, pak platí*

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}(X|B_j) \cdot P(B_j).$$

Náhodné procházky

A nyní konečně k náhodným procházkám. Co to vlastně je? Obecně lze říci, že to jsou takové úlohy, kde předem známe množinu možných stavů a v jednotlivých krocích se náhodně z jednoho stavu dostáváme do jiného s určitou pravděpodobností. Není dán počet „kroků“, není to tedy nějaké kombinatorické počítání možností (těch je totiž nekonečně mnoho). Počítáme většinou pravděpodobnost, že se dostaneme do určitého (koncového) stavu, popř. jak dlouho to v průměru bude trvat. Nejlépe si vše ukážeme na příkladech.

Příklad. (Těžký život opilce aneb nejjednodušší náhodná procházka) Opilec jde z hospody tak, že každý krok je buď směrem šikmo dopředu a doprava s pravděpodobností p nebo dopředu a doleva s pravděpodobností $1 - p$. Začíná uprostřed nekonečně dlouhé silnice, která je široká tak, že do strany smí udělat jen jeden krok, další týmž směrem je už do příkopu (ze kterého už nevstane a procházka tedy končí). Jaká je pravděpodobnost, že spadne do pravého (do levého) příkopu? Je vůbec jisté, že skončí v příkopu? Kolik kroků (průměrně) stihne udělat, než skončí v příkopě?

Příklad. (How to gamble if you must aneb opatrnost se ne vždy vyplácí) Hráč má 900 Kč, chce získat 1000 Kč. Pravidla sázení jsou jednoduchá: Vsadí-li X, vyhraje s pravděpodobností p částku $2X$, nebo prohraje s pravděpodobností $1-p$ a nedostane nic. Hra končí, jakmile vše prohraje, nebo má požadovanou částku 1000 Kč. Jakou má zvolit strategii? Jakou má pak pravděpodobnost výhry?

Příklad. (Tenis aneb alespoň jedna výchovně nezávadná úloha) Hráči A a B hrají tenis (s trochu zjednodušenými pravidly). A získá míček s pravděpodobností p, B s pravděpodobností $1-p$. Hra končí jakmile jeden z nich vyhraje 4 míčky, podmínkou však je, že má alespoň o 2 míčky víc, než ten druhý. Pokud tomu tak není, hrají dál, dokud nebude mít jeden z nich o 2 míčky víc. Jaká je pravděpodobnost výhry hráče A a jaká hráče B? Je jisté, že hra skončí? Jak dlouho průměrně budou takovou hru hrát?