Úloha 1. Vyřešte pro $x \in \mathbb{R}$ rovnici

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5} \cdot \sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

Výsledek.

$$x = \frac{13\pi}{2} + 55k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Návod. Po převedení jedničky na druhou stranu rovnice získáme rovnici $\sin\frac{x+\pi}{5} \cdot \sin\frac{x-\pi}{11} = -1$, a tedy vzhledem k omezenosti funkce sinus musí platit buď $\frac{x+\pi}{5} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ a $\frac{x-\pi}{11} = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ nebo $\frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ a $\frac{x-\pi}{11} = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Zkombinováním dostaneme výsledek.

Úloha 2. Tři členy důležitého výboru čeká hlasování, zda chtějí přijmout nového člena. Podle pravidel výboru se prvně hlasuje o tom, kdo bude kandidát na přijetí (zda Žofie nebo Přemysl) a teprve v druhém kole se hlasuje, zda se výbor rozšíří nebo ne. Preference jednotlivých členů výboru jsou následující.
Pankrác: Žofie > nikdo > Přemysl
Servác: nikdo > Žofie > Přemysl
Bonifác: Přemysl > Žofie > nikdo

Jak hlasování dopadne, pokud se ledoví muži chovají racionálně a

(a) nikdo nezná preference ostatních,

(b) všichni znají preference všech.

Výsledek.

(a) Ž

(b) Ž

Návod. nakreslí se rozhodovací strom a uhádá se to. (-;

Úloha 3. Na přímce p jsou dány body K, L. Kružnice k resp. l mají vnější dotyk v bodě T a navíc se dotýkají přímky p v bodech K resp. L. Určete množinu bodů T.

Výsledek. Kružnice nad průměrem KL bez bodů K, L.

Návod. Pro střed M úsečky KL z mocnosti platí $|MK| = |MT| = |ML|$, takže T musí ležet na kružnici nad průměrem. Naopak ke každému bodu této kružnice různému od K, L lze snadno sestrojit odpovídající kružnice.

Úloha 4. Zjistěte, v závislosti na $n \in \mathbb{N}$, čemu se rovná výraz

$$V(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Výsledek. $V(n) = n/(n+1)$.

Návod. Dosazením $n = 1$ dostaneme $V(1) = 1/2$, pro $n = 2$ dostaneme $V(2) = 2/3$. Máme hypotézu, že $V(n) = n/(n+1)$. Tu dokážeme indukcí. Stačí nám jen indukční krok, jelikož máme $V(1) = 1/2$. Tedy celkově platí

$$V(n+1) = V(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Úloha 5. Najděte všechna prvočísla, jejichž ciferný součet je roven 3.

Výsledek. Pouze prvočíslo 3.

Návod. Kdykoliv je ciferný součet nějakého čísla dělitelný třemi, je i číslo samo dělitelné třemi, a tedy jediným řešením úlohy je číslo 3.

Úloha 6. Mějme graf na n vrcholech. Každý vrchol má stupeň alespoň $k < n$. Dokažte, že existuje cesta o $k + 1$ vrcholech.

Výsledek. Ano, vážně existuje.

Návod. Označíme si nejdelší cestu $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Pro spor předpokládejme, že $m < k + 1$. Koukneme se na vrchol v_1. Ten nesmí sousedit s vrcholem, který není v této cestě, protože by pak nebyla nejdelší. Má tedy supeň maximálně $m - 1$, což je podle předpokladu menší než k. A to je spor se zadáním.

Úloha 7. Na stranách BC, CA, AB trojúhelníka ABC jsou postupně zvoleny body X, Y, Z. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AYZ, XBZ, XYC procházejí jedním bodem.

Výsledek. Je to tak.

Návod. Označme P průsečík kružnic AYZ a XBZ. Pak

$$\sphericalangle XPY = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = 180^\circ - \gamma$$

a čtyřúhelník $XPYC$ je tětivový.

Úloha 8. Zapište následující větu formálně a znegujte: Určitě to nádobí jednou půjdu utřít, ale rozhodně jej nepůjdu umývat.

Výsledek. ($\exists t \in C$(množina času): $\phi(t) = 1$ (true)) $\vee$ ($\forall u \in C : \mu(u) = 0$ (false)) negace: ($\forall t \in C$(množina času): $\phi(t) = 0$ (false)) $\vee$ ($\exists u \in C : \mu(u) = 1$ (true))

Návod. Zápis je jednoduchý, po použití negace se $\forall$ a $\exists$ mění jedno za druhé a pokud je nějaké výrokové formuli přiřazena hodnota 1, tak negací se jí dá hodnota 0 a naopak.

Úloha 9. Nechť D je bod na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC. Dále X je střed kružnice opsané $\triangle ADC$ a Y střed kružnice opsané $\triangle BDC$. Dokažte, že body C, D, X a Y leží na jedné kružnici.

Výsledek. Je to tak.

Návod. Středové úhly CXD a CYD jsou postupně rovny 2α a 2β. Jejich součet tedy je 180° a jsme hotovi.

Úloha 10. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty výšek z vrcholů B, C. Buď X bod na straně BC různý od B, C. Předpokládejme, že kružnice opsané trojúhelníkům XBC_0 a XCB_0 se podruhé protnou v bodě Y. Ukažte, že body A, X, Y leží v přímce.

Výsledek. Ano.

Návod. Čtyřúhelník BCC_0B_0 je tětivový. Bod A má tedy stejnou mocnost k oběma zadaným kružnicím, pročež leží na jejich chordále.

Úloha 11. Najdi všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňují rovnici

$$xf(x + y) = x^2 + yf(x).$$

Výsledek. $f(x) = x$

Návod. Dosazením $x = 0$, $y = 1$ dostaneme $f(0) = 0$. Poté dosadíme $y = -x$ a dostaneme, že $xf(x) = x^2$, odtud $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že taková funkce je řešením rovnice.

Úloha 12. Nalezněte rovnovážný bod hry zadané maticí:

strategie	t_1	t_2	t_3
s_1	$(1,0)$	$(1,3)$	$(3,0)$
s_2	$(0,2)$	$(0,1)$	$(3,0)$
s_3	$(0,2)$	$(2,4)$	$(5,3)$

Výsledek. prvek (s_3, t_2)

Návod. Rovnovážný bod je ten prvek, od něhož jednostranné odchylení nepřinese výhodu tomu, kdo se odchýlil.

Úloha 13. Znegujte následující výrokovou formuli a zapište: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : ((xm = \sqrt[n]{2}) \vee (n \text{ a } m \text{ jsou prvočísla}))$.

Výsledek. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{R}) : ((xm \neq \sqrt[n]{2}) \wedge (n \text{ nebo } m \text{ nejsou prvočísla}))$.

Návod. Po použití negace se $\forall$ a $\exists$ mění jedno za druhé. A potom jsou dvě výrokové formule, přičemž jedna z nich je tvořena ještě dvěma dalšími výrokovými formulemi. Jenže všechny tyto výroky jsou spojeny pomocí $\vee$, takže je jedno v jakém pořadí negujeme, a tedy vznikne řada $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Úloha 14. Spočítejte

$$\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}.$$

Výsledek.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Návod. Počítejme

$$\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24} = \big(\cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24}\big)\big(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24}\big) =$$
$$= 1 \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \cos\big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\big) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Úloha 15. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0, \qquad x^2 + (3b+a)x + 4b = 0$$

společný reálný kořen.

Výsledek. Dané rovnice mají aspoň jeden společný kořen pro všechny dvojice tvaru $(a, 2-a)$, kde a je libovolné, a pro všechny dvojice (a, a), kde $a \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.

Návod. Je-li x společný kořen obou rovnic, platí

$$x^2 + (3a+b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b+a)x + 4b = 0.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme $(2a-2b)x + 4(a-b) = 0$, což po úpravě dává $(a-b)(x+2) = 0$. Je-li číslo $x = -2$ společným kořenem obou rovnic, dosazením do kterékoli z nich dostaneme $4 - 2a - 2b = 0$, tedy $b = 2 - a$. Pro takové b mají obě rovnice při libovolné hodnotě parametru a společný kořen -2. Jestliže $a = b$, mají obě dané rovnice stejný tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden kořen (samozřejmě společný) existuje, právě když je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, tedy právě když $a \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.

Úloha 16. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(f(x)f(y)) = f(xy) + f(x) + y.$$

Výsledek. $f(x) = x + 1$

Návod. Výraz na levé straně je symetrický, nezmění se tedy, zaměníme-li proměnné x a y. Proto se ani výraz na pravé straně nezmění záměnou proměnných x a y:

$$f(xy) + f(x) + y = f(yx) + f(y) + x.$$

Odtud dosazením $y = 0$ dostáváme pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + f(0).$$

Dosazením do původní rovnice zjistíme, že řešením je pouze funkce $f(x) = x + 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 17. Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$ takový, že $BA = BC$. Přímka určená body $P = BE \cap AD$ a $Q = CE \cap BD$ protne kružnici opsanou v bodech X, Y. Dokažte $BX = BY$

Výsledek. Je to tak.

Návod. Platí

$$\sphericalangle PEQ = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle PDQ,$$

takže $EPQD$ je tětivový. Následně

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DEC = \sphericalangle DPQ$$

a přímky XY a AC jsou tak rovnoběžné tětivy, které tedy sdílejí střed oblouku B. Skutečně tedy platí $BX = BY$.

Úloha 18. Ať $f(n)$, kde $n \geq 0$, značí počet oblastí v rovině, na které ji dělí n přímek takových, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprochází jedním bodem. V závislosti na n nalezněte $f(n)$.

Výsledek.

$$f(n) = \binom{n+1}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Návod. Nejprve zkoušením zjistíme $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$ a $f(4) = 11$. Jak vidno, rozdíly nám rostou lineárně, proto vztah pro $f(n)$ bude kvadratický v proměnné n. Pokusíme se proto dokázat $f(n) = \binom{n+1}{2} + 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$. Pro $n = 0$ máme, proto předpokládejme, že n přímek nám dělí rovinu na $\binom{n+1}{2} + 1$ oblastí. Přidáme-li jednu přímku p, pak předpoklady úlohy nám zaručí, že p má právě n průsečíků s původními n přímkami, proto protne právě $(n + 1)$ oblastí. Každou protnutou oblast rozdělí na dvě, tedy přibude $(n + 1)$ oblastí. Proto

$$f(n+1) = f(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 = \binom{n+2}{2} + 1.$$

Úloha 19. V trojúhelníku ABC zjistěte hodnotu výrazu

$$\frac{|AH| + |BH| + |CH|}{|OM_a| + |OM_b| + |OM_c|},$$

kde H je ortocentrum, O střed kružnice opsané a M_a, M_b, M_c středy stran a, b, c.

Výsledek. 2.

Návod. Patu výšky z bodu C označme C_1. Pak $|AC_1| = b\cos\alpha$, a tedy $|AH| = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} = 2R\cos\alpha$. Stejným způsobem spočítáme délky BH a CH, $|BH| = 2R\cos\beta$, $|CH| = 2R\cos\gamma$. Jejich součet pak bude

$$|AH| + |BH| + |CH| = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Platí $\cos\alpha = \frac{|OM_a|}{R}, \cos\beta = \frac{|OM_b|}{R}, \cos\gamma = \frac{|OM_c|}{R}$, z čehož ihned vyplývá, že součet $|OM_a|+|OM_b|+|OM_c|$ je roven $R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$. Hodnota výrazu je tedy

$$\frac{|AH| + |BH| + |CH|}{|OM_a| + |OM_b| + |OM_c|} = 2.$$

Úloha 20. Znegujte následující výrokovou formuli (celou) a správně zapište: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \neg\phi(x) \vee (\mu(y) \wedge \phi(y) = 1)$ a $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(x^n - y^n) = 0 \vee (x - y)^n \leq xy$, kde ϕ a μ jsou výrokové formule.

Výsledek. $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : \phi(x) \wedge (\neg\mu(y) \vee \phi(y) = 0)$ nebo $\exists n \in \mathbb{N} : \phi(x^n - y^n) = 1 \wedge (x - y)^n > xy$, $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : \phi(x) \wedge (\neg\mu(y) \vee \phi(y) = 0)$ nebo $\phi(x^n - y^n) = 1 \wedge (x - y)^n > xy$.

Návod. Po použití negace se $\forall$ a $\exists$ mění jedno za druhé. Dále můžeme kvantifikátor „probublat“ na začátek k ostatním, a tedy hned za $\exists y \in \mathbb{R}$. Ale pozor, dva kvantifikátory nesmíme zaměnit pokud jsou různé. Pak postupujeme podle závorek a pravidel negace takových, že negace konjukce dvou výrokových formulí je disjunkce jejich negací a negace disjunkce dvou výrokových formulí je konjunkce jejich negací.

Úloha 21. Najděte největší přirozené číslo n s nenulovými ciframi takové, že $2^{s(n)} = s(n^2)$. Symbolem $s(n)$ značíme ciferný součet čísla n.

Výsledek. 1111

Návod. Použitím nerovnosti pro ciferný součet součinu dostáváme $s(n^2) \leq s(n)^2$, tedy $2^{s(n)} \leq s(n)^2$, což implikuje $s(n) \leq 4$. Největší přirozené číslo, které má ciferný součet menší nebo roven čtyřem a všechny cifry nenulové, je 1111. Snadno ověříme, že číslo 1111 splňuje podmínky zadání.

Úloha 22. V trojúhelníku ABC vyjádřete délku spojnice bodu dotyku kružnice vepsané s protějším vrcholem A pouze pomocí x, y, z, což jsou vzdálenosti vrcholů trojúhelníka od bodů dotyku kružnice vepsané.

Výsledek.

$$\frac{y(x+z)^2 + z(x+y)^2}{2} - yz.$$

Návod. Označme onu spojnici g_a. Dosazením do Stewartovy věty dostáváme vztah

$$a(g_a^2 + yz) = b^2y + c^2z,$$

který již pouze upravíme do tvaru

$$g_a^2 = \frac{y(x+z)^2 + z(x+y)^2}{2} - yz.$$

Úloha 23. Je dána kružnice k a bod A ležící vně k. Uvažme všechny kružnice l procházející bodem A a mající s k vnější dotyk (bod dotyku označme B). Tečny kružnice l v bodech A, B se protnou v bodě P. Najděte množinu bodů P.

Výsledek. Chordála A a k.

Návod. Bod P má stejnou mocnost k bodu A jako ke kružnici k, takže musí ležet na chordále. Naopak z každého bodu X chordály můžeme vést tečnu ke kružnici k neprocházející bodem A, která se k dotýká v B. Do úhlu AXB pak lze vepsat kružnici l.

Úloha 24. Dokažte, že pro reálná x, y platí

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy - x + 2y.$$

Výsledek. Je to tak!

Návod. Násobením nerovnosti dvěma a úpravou dostáváme

$$2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy + 2x - 4y = (x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2xy + 1) + \\ + (y^2 - 2y + 1) + x^2 = (x - y + 1)^2 + (y - 1)^2 + x^2 \geq 0.$$

Úloha 25. Je dán rovinný graf takový, že všechny jeho stěny jsou ohraničené třemi hranami (včetně vnější). Každý vrchol obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že počet trojúhelníků, které mají každý vrchol jinou barvou, je sudý.

Výsledek. No co se divíte, je sudý na tutti.

Návod. Každá stěna bude představovat vrchol grafu G. Dva vrcholy z G budou spojené hranou pokud jim odpovídající stěny mají dva společné vrcholy, a to jeden modrý a druhý zelený. Je jasné, že žádný vrchol z G nemá stupeň více než dvě. Pro trojúhelník, které má všechny tři vrcholy různé barvy platí, že má v grafu G stupeň právě jedna. Teď si stačí uvědomit, že graf G je složení několika disjunktních cest a kružnic. Každá cesta má dva vrcholy stupně jedna a každá kružnice nemá žádný. Tedy součet je vždy sudý.

Úloha 26. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n}.$$

Výsledek. $(-1)^n$.

Návod. Vieme, že n-tá diferencia postupnosti s je $(\Delta^n s)_m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} s_{m+k}$. Toto aplikujeme pre postupnosť $s_k = \binom{n+k}{n}$, ktorej n-tá diferencia je $\binom{n+k}{0} = 1$. Suma v zadaní je teda nultý člen tejto postupnosti a vytknutím $(-1)^n$ dostávame žiadanú odpoveď.

Úloha 27. V trojúhelníku ABC, kde úhly při vrcholech A,B,C jsou postupně α,β,γ, platí

$$3 \sin \alpha + 4 \cos \beta = 6,$$

$$4 \sin \beta + 3 \cos \alpha = 1.$$

Určete velikost úhlu γ.

Výsledek.

$$\gamma = 30^\circ$$

Návod. Po umocnění a sečtení rovnic dostaneme $24(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = 12$, z čehož vyplývá díky součtovému vzorci $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$. Neboť $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, máme $\sin \gamma = \frac{1}{2}$. Možnost $\gamma = 150^\circ$ nevyhovuje, poněvadž by to znamenalo, že $\alpha < 30^\circ$, tedy $3 \sin \alpha + 4 \cos \beta < \frac{3}{2} + 4 < 6$, což je spor se zadáním. Nyní zbývá ještě ukázat, že existuje trojúhelník s $\gamma = 30^\circ$ splňující zadané rovnosti. Použitím součtového vzorce a faktu, že $\alpha = 150^\circ - \beta$ dostaneme v podstatě 2 rovnice o 2 neznámých $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$, které nám po chvilce poví, že α a β opravdu existují.

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y.$$

Výsledek. $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Návod. Za $[x, y]$ dosadíme $[0, y]$ a $[0, -y]$ a dostaneme

$$f(y) + 2f(-y) = 3f(0) - y,$$
$$f(-y) + 2f(y) = 3f(0) + y.$$

Odečtením dvojnásobku druhé rovnice od první získáme $f(y) = f(0) + y$. Zkouškou ověříme, že funkce tvaru $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, jsou řešením rovnice.

Úloha 29. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $\sphericalangle BPD = \sphericalangle ABC$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné.

Výsledek. Je to tak.

Návod. Čtyřúhelník $ABPD$ je tětivový. Nyní už jen počítáme úhly

$$\sphericalangle ADB - \sphericalangle PBC = \sphericalangle APB - \sphericalangle PBC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = \\ = \sphericalangle DAB - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle ACD = \sphericalangle DAB - \sphericalangle PCD.$$

Takže $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DAB$, právě když $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCD$, což je podle věty o úsekovém úhlu ekvivalentní dokazovanému tvrzení.

Úloha 30. Najděte kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ takový, že zvětšíme-li libovolný z jeho koeficientů o 1 získáme trojčlen, který má dvojnásobný kořen.

Výsledek. $1/8x^2 - 3/4x + 1/8$.

Návod. Má-li mít každý takový trojčlen dvojnásobný kořen, musí být jeho diskriminant nulový. Dostaneme tak odtud soustavu

$$b^2 - 4a(c+1) = 0, \tag{1}$$
$$(b+1)^2 - 4ac = 0, \tag{2}$$
$$b^2 - 4(a+1)c = 0. \tag{3}$$

Odečtením (1) − (3) dostáváme okamžitě rovnost $a = c$ a řešíme ekvivalentní soustavu

$$b^2 - 4a^2 - 4a = 0, \tag{1$'$}$$
$$b^2 + 2b + 1 - 4a^2 = (b + 1 - 2a)(b + 1 + 2a) = 0, \tag{2$'$}$$

Opět odečtením $(2)' - (1)'$ obdržíme $2b + 4a + 1 = 0$, neboli $b + 1 + 2a = 1/2$, tedy v $(2)'$ musí platit $(b + 1 - 2a) = 0$ Nyní již máme dvě lineární rovnice o dvou neznámých, jejímž řešením je $a = 1/8$ a $b = -3/4$. Dostáváme tak jedinou trojici $[a, b, c] = [1/8, -3/4, 1/8]$ jejíž správnost snadno ověříme zkouškou.

Úloha 31. Pomocí poloměru R kružnice opsané a poloměru r kružnice vepsané vyjádřete délku OI spojnice jejich středů.

Výsledek.

$$|OI|^2 = R^2 + \frac{rc}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = R^2 + \frac{rc}{\sin\gamma} = R^2 + 2Rr.$$

Návod. Uvažme trojúhelník ABC se středem kružnice vepsané I a kružnicí opsanou. Označme $\check{\mathrm{S}}_c$ střed oblouku AB, který neobsahuje bod C. Bod $\check{\mathrm{S}}_c$ zřejmě leží na ose úhlu z vrcholu C, tedy můžeme psát mocnost bodu I ke kružnici opsané

$$|\check{\mathrm{S}}_c I||IC| = |OI|^2 - R^2.$$

Pomocí základních prvků trojúhelníka vyjádříme délky na levé straně rovnosti

$$|\check{\mathrm{S}}_c I| = |\check{\mathrm{S}}_c A| = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$|IC| = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Tedy po dosazení

$$|OI|^2 = R^2 + \frac{rc}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = R^2 + \frac{rc}{\sin\gamma} = R^2 + 2Rr.$$