Úloha 1. Házíme šesti šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na kostkách bude sudé číslo a zároveň součin bude liché číslo?

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují:

$$f(f(n)) = n.$$

Úloha 3. Ve skupině šesti týmů se utká každý s každým. Remízy nemohou nastat. Tým získá za výhru jeden bod, za prohru žádný. Postupují dva nejlepší týmy (při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Kolik zápasů musí tým vyhrát, aby si mohl být jistý, že postoupí?

Úloha 4. Rovina je obarvena n barvami. Dokažte, že existuje jednobarevný obdélník.

Úloha 5. Rozhodněte, které z čísel je větší

$$\frac{878}{888}, \quad \frac{8788}{8888}$$

Úloha 6. Vezmeme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku 2×2 políčka. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?

Úloha 7. Buď n přirozené číslo takové, že $2^{n-2010} \mid n!$. Ukažte, že ve dvojkové soustavě má číslo n nejvýše 2010 nenulových cifer.

Úloha 8. V Zemi Oz je 5 letišť. Pro každou dvojici letišť A, B buď létá pravidelná linka z A do B, nebo z B do A, ne však obě zároveň. Víme také, že existuje letiště, ze kterého lze vyrazit a po čase se vrátit zpět. Kolik je možností, jak mohou linky mezi letišti vypadat? (letiště jsou rozlišitelná)

Úloha 9. Pro každé $n \geq 1$ najděte přirozená čísla $a_0 < a_1 < \cdots < a_{2n}$ tvořící geometrickou posloupnost, pro kterou je součin $S = a_0 a_1 \cdots a_{2n}$ druhou mocninou.

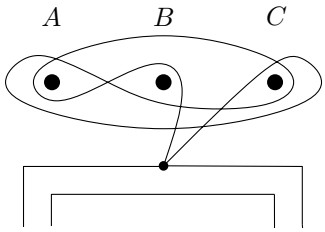
Úloha 10. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$y^2 = x^3 - 3x + 2.$$

Úloha 11. Roztržitý profesor zapomene deštník při každé návštěvě obchodu s pravděpodobností 1/4. Jestliže ráno vyšel z domova s deštníkem, během dne navštívil 4 obchody a přišel domů bez deštníku, jaká je pravděpodobnost, že jej zapomněl v posledním obchodě?

Úloha 12. Dětská skládanka obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3. Dvě složené skládanky považujeme za stejné, jestliže můžeme jednu na druhou převést pouhým pootočením.

Úloha 13. Najděte všechny kombinace písmenek A, B, C takové, že vyndání příslušných kolíků způsobí, že obraz spadne.



Úloha 14. Na polopřímce AB obdélníku $ABCD$ zvolíme bod P tak, že $|BP| = 2 \cdot |AB|$. Střed strany CD nazveme M, $AC \cap BM = Q$ a $BC \cap PQ = R$. Pomocí menelaovy věty spočítejte $\frac{|BR|}{|RC|}$.

Úloha 15. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ splňují

$$f(f(n) + n) = f(n),$$

a zároveň existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové že $f(n_0) = 1$.

Úloha 16. Mějme čtyřúhelník $ABCD$, kde $AB \cap CD = P$ a $AD \cap BC = Q$. Úhlopříčky AC a BD protnou PQ potupně v bodech X a Y. Dokažte, že

$$\frac{|PX|}{|XQ|} = \frac{|PY|}{|YQ|}.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 17. Dokažte, že platí

$$[a,b,c]^2 \mid [a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a],$$

kdykoliv $a,b,c \in \mathbb{N}$. Výraz $[a,b]$ značí nejmenší společný násobek čísel a,b.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 18. Určete, pro která $k \in \mathbb{N}$ lze najít aritmetickou posloupnost délky k v posloupnosti

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 19. Pro kladná a,b,c,d dokažte

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^3+2b^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 20. Mějme tabulku 13×13s chybějícím středním políčkem. Ukažte, že tuto tabulku nelze pokrýt tetraminy typu I.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 21. Mějme kruh o poloměru r se středem v počátku souřadnic. Náhodně z něj vybereme bod. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka délky r rovnoběžná s osou x a se středem ve vybraném bodě, bude celá uvnitř kruhu?

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 22. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle třemi barvami. Dvě obarvení považujeme za stejná, dají-li se na sebe převést pouhým otočením krychle.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 23. Najděte všechny dvojice $x,y \in \mathbb{N}$ řešící rovnici

$$y^2 = x^3 + 16.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 24. V šachovém turnaji hrál každý ze sedmi rytířů s každým právě jednou. Vítěz každého zápasu obdržel bod. V případě rovnosti bodů si dotyční rytíři o závěrečné pořadí střihli. Označíme-li x_i počet bodů, které získal rytíř, který skončil na i-tém místě, určete, jakou nejmenší hodnotu může mít součet

$$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \cdots + 7\cdot x_7.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 25. Je daný trojúhleník ABC a kružnice, která protíná strany BC, AC a AB postupně v bodech X a X', Y a Y', Z a Z'. Dokaže, že přímky AX, BY a CZ procházení jedním bodem právě když přímky AX', BY' a CZ' procházejí jedním bodem.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 26. V kruhu je rozmístěno n důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 27. Ukažte, že pokud je p takové liché prvočíslo, že i $2p+1$ je prvočíslo, pak existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že

$$2p + k \mid 2p + k^2.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující pro libovolné $m \in \mathbb{Z}$

$$f(m+8) \leq f(m) + 8$$
$$f(m+11) \geq f(m) + 11.$$

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 29. V různostranném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ABC stranu AC v bodě D. Paty kolmic z bodů A, C na přímku BD označme postupně E, F. Patu kolmice z D na AC označme M. Ukažte, že MD je osou úhlu FME.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 30. Latinský čtverec je tabulka $n \times n$, kde se v každém řádku a sloupci vyskytují jen navzájem různá čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Latinským obdélníkem nazveme tabulku $k \times n$, kde $k < n$ a která splňuje tytéž podmínky. Dokažte, že každý latinský obdélník lze doplnit na čtverec.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 31. Buď $p > 3$ prvočíslo. Ukažte, že každý dělitel čísla $\frac{2^p+1}{3}$ je tvaru $2kp + 1$.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 32. Po osách x, y soustavy souřadnic se různými konstatními rychlostmi pohybují body M, N. Buď O počátek soustavy souřadnic. Body M, N proběhnou počátkem O v různý čas. Potom mají všechny kružnice opsané trojúhelníkům MNO ještě jeden pevný bod $K \neq O$.