Úloha 1. Házíme šesti šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na kostkách bude sudé číslo a zároveň součin bude liché číslo?

Výsledek.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \doteq 0{,}0156.$$

Návod. První podmínka je zbytečná, součin bude lichý, právě když všechna čísla budou lichá (1/2), kostek je 6, tedy $(1/2)^6$.

Úloha 2. Najděte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují:

$$f(f(n)) = n.$$

Výsledek. $f(n) = n$.

Návod. Pokud by platilo $f(i) = j$ pro nějaké $i < j$, potom je $f(j) = i$. Tedy f nemůže být rostoucí funkce a jediným řešením je $f(n) = n$.

Úloha 3. Ve skupině šesti týmů se utká každý s každým. Remízy nemohou nastat. Tým získá za výhru jeden bod, za prohru žádný. Postupují dva nejlepší týmy (při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Kolik zápasů musí tým vyhrát, aby si mohl být jistý, že postoupí?

Výsledek. 5.

Návod. Pokud se skupina rozpadne na tři *silné* týmy a tři *slabé* týmy (kde každý silný tým porazí každý slabý tým) a zároveň v rámci silných i slabých týmů vyhraje i prohraje každý právě jednou, bude výsledné skóre šesti týmů rovno $(4, 4, 4, 1, 1, 1)$. Čtyři výhry tedy nestačí. Naopak 5 výher stačí určitě, protože tým porazil všechny ostatní týmy, a tedy je sám na prvním místě.

Úloha 4. Rovina je obarvena n barvami. Dokažte, že existuje jednobarevný obdélník.

Výsledek. Existuje.

Návod. Uvažujme mřížové body (x, y) tak, že $1 \leq x \leq n+1$ a $1 \leq y \leq n^{n+1}+1$. Jeden řádek lze obarvit právě n^{n+1} způsoby. Podle Dirichletova principu musí být dva z $n^{n+1}+1$ řádků stejně obarvené. Podle téhož pravidla však tyto stejné řádky obsahují i dva body stejné barvy, neboť barev je pouze n a řádků je $n+1$.

Úloha 5. Rozhodněte, které z čísel je větší

$$\frac{878}{888}, \quad \frac{8788}{8888}$$

Výsledek. $\frac{878}{888} < \frac{8788}{8888}$

Návod.

$$\frac{10}{888} = 1 - \frac{878}{888} > 1 - \frac{8788}{8888} = \frac{100}{8888}$$

Úloha 6. Vezmeme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku 2×2 políčka. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?

Výsledek. Ne.

Návod. Přebarvením řádku či sloupce s k černými a $8-k$ bílými políčky dostaneme $8-k$ bílých a k černých. Počet černých políček se tedy změní o $|(8-k)-k| = |8-2k|$, což je však sudé číslo. Obdobně

ve čtverci 2×2 s k černými a $4-k$ bílými políčky se počet černých změní o $|4-2k|$. Tedy parita počtu černých políček se nezmění a jednoho černého políčka dosáhnout nelze.

Úloha 7. Buď n přirozené číslo takové, že $2^{n-2010} \mid n!$. Ukažte, že ve dvojkové soustavě má číslo n nejvýše 2010 nenulových cifer.

Výsledek.

Návod. Z přednášky víme, že $v_2(n!) = n - s_2(n)$, kde $s_2(n)$ je ciferný součet n ve dvojkové soustavě. Po dosazení tedy máme

$$n - 2010 \leq n - s_2(n),$$

odkud je $s_2(n) \leq 2010$, což jsme přesně měli dokázat.

Úloha 8. V Zemi Oz je 5 letišť. Pro každou dvojici letišť A, B buď létá pravidelná linka z A do B, nebo z B do A, ne však obě zároveň. Víme také, že existuje letiště, ze kterého lze vyrazit a po čase se vrátit zpět. Kolik je možností, jak mohou linky mezi letišti vypadat? (letiště jsou rozlišitelná)

Výsledek. $2^{\binom{5}{2}} - 5! = 2^{10} - 120 = 904$.

Návod. Linky mezi letišti můžeme zakreslit jako orientovaný graf. Zadání nám o něm říká, že je to turnaj. Podmínka o existenci cyklu dále vylučuje ty turnaje, ve kterých se dají vrcholy uspořádat tak, že z každého vrcholu vede šipka do vrcholu s větším číslem. Všech turnajů je $2^{\binom{5}{2}}$, neboť máme dvě možnosti na orientaci každé hrany. Turnajů-uspořádání je 5!. Odečtením získáme požadovaný výsledek.

Úloha 9. Pro každé $n \geq 1$ najděte přirozená čísla $a_0 < a_1 < \cdots < a_{2n}$ tvořící geometrickou posloupnost, pro kterou je součin $S = a_0 a_1 \cdots a_{2n}$ druhou mocninou.

Výsledek. Například $a_0 = q^n, a_1 = q^{n+1}, \ldots, a_n = q^{3n}$.

Návod. Označme si A první člen takovéto posloupnosti a q její kvocient. Pro $i = 0, \ldots, 2n$ platí $a_i = Aq^i$ a $S = A \cdot Aq \cdot Aq^2 \ldots Aq^{2n} = A^{2n+1} q^{1+2+\cdots+2n} = A^{2n+1} q^{n(2n+1)}$. Při volbě $A = q^n$ je $S = (q^{n(2n+1)})^2$.

Úloha 10. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice

$$y^2 = x^3 - 3x + 2.$$

Výsledek. Všechna, pro která je $x + 2$ druhá mocnina.

Návod. Rozložíme $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ a vidíme, že $x + 2$ musí být čtverec.

Úloha 11. Roztržitý profesor zapomene deštník při každé návštěvě obchodu s pravděpodobností 1/4. Jestliže ráno vyšel z domova s deštníkem, během dne navštívil 4 obchody a přišel domů bez deštníku, jaká je pravděpodobnost, že jej zapomněl v posledním obchodě?

Výsledek.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256} \doteq 0{,}1055.$$

Návod. Zapomněl ho v posledním = nesměl ho zapomenout $(1 - 1/4)$ v těch třech předtím $(1 - 1/4)^3$ a přitom ho zapomněl 1+ v tom posledním $(1 - 1/4)^3 \cdot 1/4$.

Úloha 12. Dětská skládanka obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3×3. Dvě složené skládanky považujeme za stejné, jestliže můžeme jednu na druhou převést pouhým pootočením.

Výsledek. 420.

Návod. Skládanku můžeme otočit o $0°$, $90°$, $180°$ nebo $270°$. U každého z těchto čtyř otočení spočítáme počet pevných bodů.

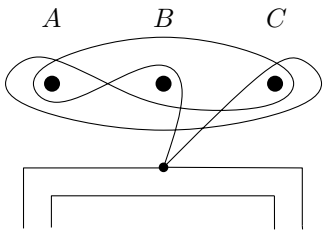
- identita (otočení o $0°$): $\frac{9!}{3!3!3!}$ pevných bodů

- otočení o 90°: 0 pevných bodů
- otočení o 180°: 0 pevných bodů
- otočení o 270°: 0 pevných bodů

  Z Burnsideova lemmatu je počet orbit, tj. počet různě složených skládanek, roven

$$\frac{1}{4}\left(\frac{9!}{3!3!3!} + 0 + 0 + 0\right) = 420.$$

Úloha 13. Najděte všechny kombinace písmenek A, B, C takové, že vyndání příslušných kolíků způsobí, že obraz spadne.



Výsledek. A, AB, AC, BC, ABC.

Návod. Zamotanost provázku na kolících lze znázornit posloupností $B^-ABCA^-C^-$. Všimneme si, že po smazání A-ček se provázek rozmotá. Zbývá si rozmyslet vliv písmen B a C. Odebrání žádného zvlášť ještě obraz neshodí, odebrání obou už však ano.

Úloha 14. Na polopřímce AB obdélníku $ABCD$ zvolíme bod P tak, že $|BP| = 2 \cdot |AB|$. Střed strany CD nazveme M, $AC \cap BM = Q$ a $BC \cap PQ = R$. Pomocí menelaovy věty spočítejte $\frac{|BR|}{|RC|}$.

Výsledek.

Návod. Podle Menelaovy věty pro trojúhleník ABC a přímku PQ dostaneme vztah $\frac{|BR|}{|RC|} = \frac{|BP||AQ|}{|PA||QC|}$. Dále víme, že $\frac{|BP|}{|PA|} = \frac{2}{3}$ a z podobnosti trojúhelníků $\frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|MC|} = \frac{2}{1}$. Tedy $\frac{|BR|}{|RC|} = \frac{4}{3}$.

Úloha 15. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ splňují

$$f(f(n) + n) = f(n),$$

a zároveň existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové že $f(n_0) = 1$.

Výsledek. $f(n) = 1$.

Návod. Dosadíme n_0 a máme $f(n_0 + 1) = f(n_0) = 1$. Dále indukcí dokážeme, že pro každé $n > n_0$, platí $f(n) = 1$. Nakonec na druhou stranu ukážeme $f(n_0 - 1) = 1$ pomocí dosazení $n_0 - 1$ a postupným sestupem ukážeme $f(n) = 1$ pro n od $n_0 - 1$ do 1.

Úloha 16. Mějme čtyřúhelník $ABCD$, kde $AB \cap CD = P$ a $AD \cap BC = Q$. Úhlopříčky AC a BD protnou PQ potupně v bodech X a Y. Dokažte, že

$$\frac{|PX|}{|XQ|} = \frac{|PY|}{|YQ|}.$$

Výsledek.

Návod. Z Cevovy věty pro trojúhleník DQP a bod B plyne $\frac{|PY|}{|YQ|} = \frac{|PC||DA|}{|CD||AQ|}$. Z Menelaovy věty pro trojúhelník DQP a přímku AC plyne $\frac{|PX|}{|XQ|} = \frac{|PC||DA|}{|CD||AQ|}$. Tedy dohromady dostáváme požadovaný vztah $\frac{|PX|}{|XQ|} = \frac{|PY|}{|YQ|}$.

Úloha 17. Dokažte, že platí

$$[a, b, c]^2 \mid [a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a],$$

kdykoliv $a, b, c \in \mathbb{N}$. Výraz $[a, b]$ značí nejmenší společný násobek čísel a, b.

Výsledek.

Návod. Ukážeme, že levá strana obsahuje každé prvočíslo v menší nebo stejné mocnině než pravá. Zvolme nějaké prvočíslo p a sledujme jeho exponent na levé a pravé straně. Zbyde dokázat

$$2\max(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) \leq \max(v_p(a), v_p(b)) + \max(v_p(b), v_p(c)) + \max(v_p(c), v_p(a)),$$

což můžeme buď prostě uvidět anebo búno uspořádat $v_p(a) \geq v_p(b) \geq v_p(c)$ a odstranit tak všechna maxima.

Úloha 18. Určete, pro která $k \in \mathbb{N}$ lze najít aritmetickou posloupnost délky k v posloupnosti

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.$$

Výsledek. Pro libovolné k přirozené to lze.

Návod. Pro pevné k uvažme posloupnost

$$\frac{1}{k!}, \frac{2}{k!}, \frac{3}{k!}, \ldots, \frac{k}{k!}.$$

Ta je jistě aritmetická a každý její člen díky faktoriálu ve jmenovateli bude mít v základním tvaru v čitateli číslo 1.

Úloha 19. Pro kladná a, b, c, d dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3 + 2b^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}$$

Výsledek.

Návod.

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3 + 2b^3} = \sum_{cyc} \left(a - \frac{2ab^3}{a^3 + 2b^3}\right) \geq \sum_{cyc} \left(a - \frac{2ab^3}{3ab^2}\right) = \sum_{cyc} a - \frac{2}{3}b = \frac{a+b+c+d}{3}$$

Úloha 20. Mějme tabulku 13×13s chybějícím středním políčkem. Ukažte, že tuto tabulku nelze pokrýt tetraminy typu I.

Výsledek. Opravdu nelze.

Návod. Obarvěme si tabulku po sloupcích čtyřmi barvami postupně $0, 1, 2, 3, 0, 1, \ldots 0$. Celkem tak máme $3 \cdot 13$ jedniček a trojek $4 \cdot 13$ nul a $3 \cdot 13 - 1$ dvojek. Tetramino I lze umístit pouze horizontálně nebo vertikálně. V prvním případě zakryje každou z barev právě jednou, v opačném případě zakryje čtyři stejné. Nyní uvažme, že jsme našli nějaké pokrytí celé tabulky. Položme tedy nejprve všechna horizontální I-čka. Potom nám jistě zbývá nějakých a políček barvy 2, $a+1$ políček barev 1,3 a $a+14$ políček barvy 0. Tato čísla však nemohou být současně dělitelná čtyřmi a proto nelze tabulku doplnit vertikálními kostkami.

Úloha 21. Mějme kruh o poloměru r se středem v počátku souřadnic. Náhodně z něj vybereme bod. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka délky r rovnoběžná s osou x a se středem ve vybraném bodě, bude celá uvnitř kruhu?

Výsledek. $1/4$.

Návod. Vyhovující body jsou právě ty, které leží v kruhu o poloměru $r/2$ se středem rovněž v počátku. Poměr obsahů obou kruhů je hledaná pravděpodobnost, tedy

$$P = \frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}.$$

Úloha 22. Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle třemi barvami. Dvě obarvení považujeme za stejná, dají-li se na sebe převést pouhým otočením krychle.

Výsledek. 333.

Návod. Barvěme krychli k barvami. Krychli můžeme otočit celkem 24 způsoby, počítejme počty pevných bodů jednotlivých permutací, které odpovídají těmto otočením.

- $1\times$ identita: k^8 pevných bodů
- $6\times$ otočení o $90°$ nebo $270°$ kolem os procházejících středy protilehlých stěn krychle: k^2 pevných bodů
- $3\times$ otočení o $180°$ kolem os procházejících středy protilehlých stěn krychle: k^4 pevných bodů
- $6\times$ otočení o $180°$ kolem os procházejících středy protilehlých hran krychle: k^4 pevných bodů
- $8\times$ otočení o $120°$ nebo $240°$ kolem os procházejících protilehlými vrcholy krychle: k^4 pevných bodů

Z Burnsideova lemmatu je počet orbit, tj. počet různých obarvení krychle, roven

$$\frac{1}{24}(k^8 + 6k^2 + 3k^4 + 6k^4 + 8k^4) = \frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2).$$

Dosadíme-li $k = 3$, vyjde nám celkový počet různých obarvení 3 barvami 333.

Úloha 23. Najděte všechny dvojice $x, y \in \mathbb{N}$ řešící rovnici

$$y^2 = x^3 + 16.$$

Výsledek. $x = 0, y = \pm 4$.

Návod. Zjevně platí $\mathrm{NSD}(y + 4, y - 4) = \mathrm{NSD}(y + 4, 8) \mid 8$, jenže nemůže být ani 2, ani 4 kvůli výskytu třetí mocniny u x, takže je buď 1, nebo 8. To nám ale dává, že jsou $y - 4$ a $y + 4$ třetí mocniny, což je ale možné jen pro $y = \pm 4$.

Úloha 24. V šachovém turnaji hrál každý ze sedmi rytířů s každým právě jednou. Vítěz každého zápasu obdržel bod. V případě rovnosti bodů si dotyční rytíři o závěrečné pořadí střihli. Označíme-li x_i počet bodů, které získal rytíř, který skončil na i-tém místě, určete, jakou nejmenší hodnotu může mít součet

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + 7 \cdot x_7.$$

Výsledek. 56.

Návod. Předpokládejme, že existuje dvojice rytířů R, S taková, že R porazil S, ale přitom ve výsledném pořadí skončil hůř. Pokud magicky změníme výsledek střetnutí mezi rytíři R a S, hodnota součtu se zmenší. Nejmenší hodnotu bude tedy výraz mít tehdy, pokud každý rytíř porazí právě ty rytíře, kteří ve výsledku dopadnou hůř než on. Taková situace je možná a odpovídá jí součet $1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 56$.

Úloha 25. Je daný trojúhleník ABC a kružnice, která protíná strany BC, AC a AB postupně v bodech X a X', Y a Y', Z a Z'. Dokaže, že přímky AX, BY a CZ procházení jedním bodem právě když přímky AX', BY' a CZ' procházejí jedním bodem.

Výsledek.

Návod. Z mocnosti z bodu A plyne $|AY||AY'| = |AZ||AZ'|$, jinak $\frac{|AY|}{|AZ|} = \frac{|AY'|}{|AZ'|}$. Obdobně pro mocnosti z bodů B a C dostáváme $\frac{|BZ|}{|BX|} = \frac{|BZ'|}{|BX'|}$ a $\frac{|CX|}{|CY|} = \frac{|CX'|}{|CY'|}$. Po vynásobení $\frac{|AY||CX||BZ|}{|YC||XB||ZA|} = \frac{|AY'||CX'||BZ'|}{|YC'||XB'||ZA'|}$ a tedy podle Cevovy věty je důkaz hotov.

Úloha 26. V kruhu je rozmístěno n důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?

Výsledek. Jen pro n liché.

Návod. Buď a_i počet kuliček v důlku i. Označme si $S = 1a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. Všimněme si, že v jednom tahu se S změní buď o 0, n nebo $-n$, tedy S modulo n je invariant. Na začátku je $S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

chceme se dostat do situace kn, pro nějaké k, že $1 \leq k \leq n$. Platí-li $S \equiv 0 \mod n$ na konci, musí platit totéž i na začátku, tedy $(n+1)/2$ musí být celé. Odtud n musí být liché. Najít příklad takového shromáždění pro liché n je již snadné.

Úloha 27. Ukažte, že pokud je p takové liché prvočíslo, že i $2p+1$ je prvočíslo, pak existují právě čtyři přirozená čísla k taková, že

$$2p + k \mid 2p + k^2.$$

Výsledek.

Návod. Chceme, aby podíl $(2p+k^2)/(2p+k)$ byl celočíselný. Odečítejme postupně od čitatele násobky jmenovatele tak, aby z čitatele zmizelo k (je to vlastně dělení se zbytkem)

$$\frac{2p+k^2}{2p+k} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2p-2kp}{2p+k} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2p(2p+1)}{2p+k} \in \mathbb{Z}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že čitatel má přesně čtyři dělitele, kteří jsou větší než $2p$.

Úloha 28. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující pro libovolné $m \in \mathbb{Z}$

$$f(m+8) \leq f(m) + 8$$
$$f(m+11) \geq f(m) + 11.$$

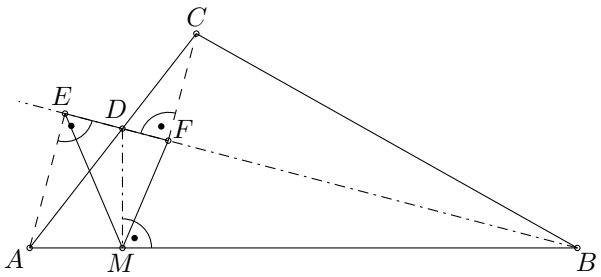
Výsledek. $f(n) = n + c$.

Návod. Postupně z první rovnice dokážeme, že $f(m+88) \leq \cdots \leq f(m) + 88$ a z druhé rovnice, že $f(m+88) \geq \cdots \geq f(m) + 88$ z toho ale plyne, že všude nastávají rovnosti, a jelikož je $\mathrm{NSD}(8, 11) = 1$, tak pro každé m platí, že $f(m+8k) = f(m) + 8k$ a zároveň $f(m+11k) = f(m) + 11k$, z čehož vhodnou kombinací plyne, že $f(m) = f(m) + c$.

Úloha 29. V různostranném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ABC stranu AC v bodě D. Paty kolmic z bodů A, C na přímku BD označme postupně E, F. Patu kolmice z D na AC označme M. Ukažte, že MD je osou úhlu FME.

Výsledek. Stačí ukázat.

Návod.



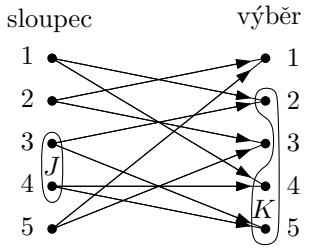
Protože je trojúhelník různostranný, tak body D, E, F nesplývají. Trojúhelníky ADE, CDF a BDM jsou podobné (mají pravý úhel a shodný úhel u D), takže se při spirální podobnosti $\mathcal{S}\big(D, \sphericalangle\overrightarrow{ADE}, \frac{|DE|}{|AD|}\big)$ čtveřice bodů $ABCD$ zobrazí na čtveřici $FMED$. Tyto čtveřice jsou tak navzájem podobné, a protože BD byla osou úhlu ABC, tak odpovídající MD je osou odpovídajícího úhlu FME.

Úloha 30. Latinský čtverec je tabulka $n \times n$, kde se v každém řádku a sloupci vyskytují jen navzájem různá čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Latinským obdélníkem nazveme tabulku $k \times n$, kde $k < n$ a která splňuje tytéž podmínky. Dokažte, že každý latinský obdélník lze doplnit na čtverec.

Výsledek. Lze.

Návod. Nejprve ukážeme, že obdélník $k \times n$, $(k < n)$ lze doplnit o další řádek na obdélník $(k+1) \times n$, zbytek tvrzení se ukáže snadno indukcí. Pro každý sloupec na řádku $k+1$ hledáme po dvou různá čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ tak, aby splňovala definici latinského obdélníku, t.j. v každém sloupci bude každé

číslo nejvýše jednou. Zvolme si pro každý sloupec $i \in \{1, \dots, n\}$ množinu M_i, která obsahuje čísla, jež je možno doplnit na v i-tém sloupci na řádku $k+1$. Tuto skutečnost si představme, jako šipky které vedou od každého sloupce i do všech čísel z M_i.



Ukažme nyní, že v systému $\{M_i;\ i \in \{1, \dots, n\}\}$ existuje systém různých reprezentantů, neboli že každému ze sloupců 1 až n lze přiřadit různé číslo od jedné do n a tím vytvořit řádek $k+1$. Stačí ověřit Hallovu podmínku, čili ukázat, že platí $\left|\bigcup_{i \in J} M_i\right| \geq |J|$ pro každou $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Z obrázku je vidět, že z každého bodu (sloupce) vede právě $n-k$ šipek, neboť k čísel je již ve sloupci napsáno. Rovněž i do každého bodu (čísla) vede $k-n$ šipek, jelikož tabulka obsahuje n čísel od každého a k jich je již vybráno. Nyní zvolme $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ libovolně a označme $K = \bigcup_{i \in J} M_i$. K je tedy množina bodů, kam se lze z J dostat po šipkách. Vidíme, že z J vede právě $(n-k)|J|$ šipek. Do K vede alespoň $(n-k)|K|$ (a klidně i nějaké navíc odjinud). Odtud dostáváme požadovanou nerovnost $|J| \leq |K|$.

Úloha 31. Buď $p > 3$ prvočíslo. Ukažte, že každý dělitel čísla $\frac{2^p+1}{3}$ je tvaru $2kp+1$.

Výsledek.

Návod. Požadovanou vlastnost stačí ukázat pro prvočíselné dělitele čísla $\frac{2^p+1}{3}$. Nejprve ukážeme, že takovým dělitelem nemůže být číslo 3. Pak by ovšem $2^p \equiv -1 \pmod 9$, což ale platí právě pro exponenty tvaru $6m+3$ (což zjistíme rozborem malých případů a pozorováním, že $2^6 \equiv 1 \pmod 9$). Prvočísla větší než tři ovšem nikdy nejsou tohoto tvaru.

Vezměmě nyní prvočíslo $q > 3$ ($q = 2$ též nepřipadá v úvahu). Pak musí $q \mid 2^p + 1$ a tedy $2^p \equiv -1 \pmod q$. Pro řád prvku $r = \mathrm{ord}_q(2)$ pak platí $r \mid 2p$. Zjevně ale $r \notin \{1, p\}$ a jelikož $q \geq 5$, pak ani $2^2 \not\equiv 1 \pmod q$, takže $r \neq 2$. Zbývá pouze $r = 2p$. Podle Malé Fermatovy věty $2p = r \mid q-1$ a tedy $q \equiv 1 \pmod{2p}$.

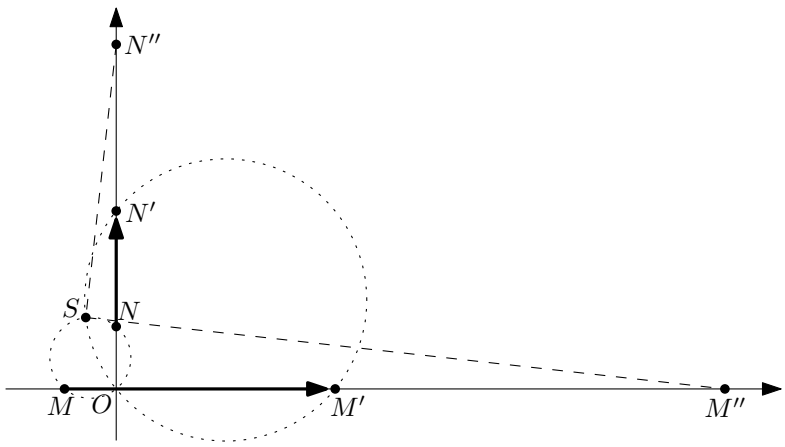
Úloha 32. Po osách x, y soustavy souřadnic se různými konstatními rychlostmi pohybují body M, N. Buď O počátek soustavy souřadnic. Body M, N proběhnou počátkem O v různý čas. Potom mají všechny kružnice opsané trojúhelníkům MNO ještě jeden pevný bod $K \neq O$.

Výsledek. No jistě že jo.

Návod. První řešení: Určitě existuje spirální podobnost, která převádí M na N ve stejném čase. To zdůvodníme například následovně. Číselnou osu x, respektive y, si „přečíslujeme“ tak, aby každý její bod měl číslo odpovídající času, kdy jím proběhne bod M, respektive N. Dostaneme nějak posunuté a otočené reálné osy, které budou mít různé měřítko, ale důležité je, že budou **navzájem podobné**. A ke každým dvěma podobným útvarům v rovině, které jsou nějak otočené, existuje spirální podobnost, která zobrazuje jeden na druhý (stejná čísla na přečíslovaných osách se zobrazí na sebe).

Označme S střed této spirální podobnosti. Platí $S \neq O$, protože jinak by procházely body M, N počátkem O ve stejný čas. Ona spirální podobnost otáčí rovinu o úhel $90°$ (úhel os x, y), takže pro všechny polohy M, N, které se zobrazují na sebe, platí $|\sphericalangle MSN| = 90°$. Jelikož i $|\sphericalangle MON| = 90°$, tak M, N, O, S leží na jedné kružnici a S je hledaný pevný bod.

Druhé řešení: Zvolme si polohy M a N ve dvou různých časech, opišme kružnice vzniklým trojúhelníkům MNO a $M'N'O$ a jejich průnik označme S.



Potom $S \neq O$ je střed spirální podobnosti $\mathcal{S}\big(S, 90°, \frac{|NN'|}{|MM'|}\big)$, která převádí $M \to N$ a $M' \to N'$. Takže jsou trojúhelníky $MM'O$ a $NN'O$ podobné. Vezměme body M'', N'' ještě v jednom jiném čase. Z rovnoměrného pohybu plyne, že mají trojice bodů M, M', M'' a N, N', N'' stejný tvar (poměr vzdáleností). Takže jsou podobné i celé čtveřice bodů $MM'M''S$ a $NN'N''S$, odpovídající si úhly jsou shodné, dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle SN''O| = |\sphericalangle SN''N| = |\sphericalangle SM''M| = |\sphericalangle SM''O|$$

a body S, O, M'', N'' leží ze shody obvodových úhlů na jedné kružnici. Volba M'', N'' byla libovolná, pevný bod S existuje.