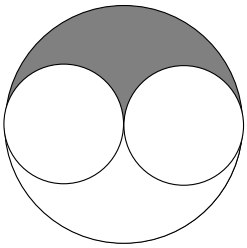
Vzorová řešení

Úloha 1. V kružnici sú vpísané dve kružnice so spoločným dotykom a polovičným priemerom. Akú časť obsahu veľkej kružnice zaberá vyznačená oblasť?



Výsledek. 1/4

Návod. BUNO malá kružnica má obsah 1, druhá tiež, veľká 4. Súčet obsahov dvoch vyznačených častí je potom 2.

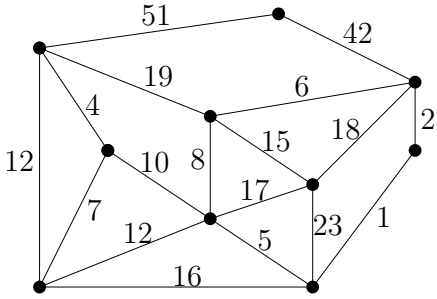
Úloha 2. Ukažte, že těžnice dělí trojúhelník na šest částí o stejném obsahu.

Výsledek. Tohle je trivka.

Návod.

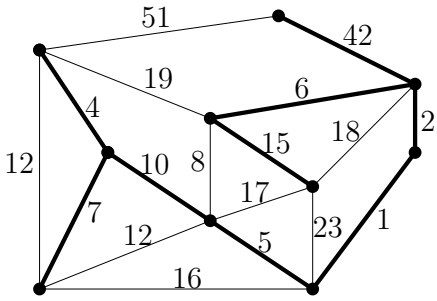
Úloha 3. Na obrázku je schématická mapka Sicílie – měst (puntíky) a silnic (úsečky) mezi nimi. U každé silnice je připsána její délka v kilometrech.

Včera na celé Sicílii znenadání napadl sníh a ochromil dopravu. Jelikož ale nejsou takové sněhové závěje moc časté, nemají místní nářadí na jeho odklízení a musí vše odházet ručně. Kolik nejméně kilometrů musí odklidit, chtějí-li se dostat z každého města do každého?



Výsledek. 92

Návod. Jde o hledání minimální kostry. Jediné řešení je toto:



Úloha 4. Řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y = z,$$
$$y^2 + z = x,$$
$$z^2 + x = y.$$

Výsledek. $x = y = z = 0$

Návod. Všechny tři rovnice sečteme, převedeme na všechny neznámé na jednu stranu a dostaneme $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Úloha 5. Nechť ABC, BDE jsou dva podobné trojúhelníky takové, že A, B, D leží v přímce a C, E ve stejné polorovině touto přímkou určené. Buď $F = AC \cap DE$. Nechť r, r_1, r_2 jsou postupně poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ADF, ABC, BDE. Vyjádřete r pomocí r_1 a r_2.

Výsledek. $r = r_1 + r_2$.

Návod. Trojúhelníky ABC, BDE a ADF jsou podobné a pro odpovídající si strany platí $|AB| + |BD| = |AD|$. Tentýž vztah musí platit i pro odpovídající si poloměry vepsaných kružnic.

Úloha 6. Osm lidí sedí okolo kulatého stolu. Věk každého je průměr věků jeho sousedů. Ukažte, že všichni lidé jsou stejně staří.

Výsledek. Dôkaz

Návod. Nájdime najstaršieho, ak je ich viac, tak takého, ktorý susedí s nejakým mladším. Jeho vek má byť priemerom dvoch menších (rovných), spor.

Úloha 7. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$, kde $|\sphericalangle ABC| = 90°$ a $|\sphericalangle DAB| = 60°$ Určete $\frac{|AC|}{|BD|}$.

Výsledek. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Návod. Podle sinové věty $|AC| \cdot \sin 60° = |BD| \cdot \sin 90°$, tedy $\frac{|AC|}{|BD|} = 1/\sin 60°$.

Úloha 8. Rozhodni, zda může být posloupnost 1 1 2 2 3 4 5 skórem grafu. Pokud ano, nakresli ho a pokud ne, dokaž. (Skóre grafu dostaneme tak, že seřadíme stupně jeho vrcholů vzestupně za sebe.)

Výsledek. Ano.

Návod. Stačí libovolný obrázek, co odpovídá, řešení je víc.

Úloha 9. Kolik existuje uspořádaných čtveřic (x, y, z, t) přirozených čísel takových, že $x+y+z+t = 31$?

Výsledek. $\binom{30}{3} = 5060$

Návod. 1.řešení: Vytvořující funkce je

$$(x + x^2 + x^3 + \dots)^4 = x^4 \frac{1}{(1-x)^4} = x^4 \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} x + \binom{5}{3} x^2 + \dots + \binom{3+27}{3} x^{27} + \dots \right),$$

takže koeficient u x^{31} je $\binom{30}{3} = 5171$.

2.řešení: Budeme hledat počet čtveřic $x', y', z', t' \in \mathbb{N}_0$ splňujících $x' + y' + z' + t' = 27$. Ten je stejný jako počet způsobů, jak mezi 27 puntíků umístit 3 přepážky, což dá $\binom{30}{3} = 5171$.

Úloha 10. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

Výsledek. $f(x) = x$

Návod. Symetrie :): $f(x) + y = f(f(x) + f(y)) = f(f(y) + f(x)) = f(y) + x$, z toho $f(x) = x + f(0)$. Dosadíme do původní rovnice a zjistíme, že ji splňuje funkce $f(x) = x$.

Úloha 11. Mějme 16 bodů v rovině poskládané do mřížky 4×4. Najděte v ní všechny (tedy 4) osmiprvkové podmnožiny (souměrné a rotované množiny nepočítejte vícekrát) takové, že žádné tři body této podmnožiny neleží na jedné přímce.

Výsledek.

⊗ × ⊗ ×	× ⊗ × ⊗	× ⊗ ⊗ ×	⊗ × ⊗ ×
⊗ × ⊗ ×	⊗ × ⊗ ×	⊗ × × ⊗	× × ⊗ ⊗
× ⊗ × ⊗	⊗ × ⊗ ×	⊗ × × ⊗	⊗ ⊗ × ×
× ⊗ × ⊗	× ⊗ × ⊗	× ⊗ ⊗ ×	× ⊗ × ⊗

Návod.

Úloha 12. Kolika způsoby lze srovnat do řady 50 želv afrických sloních a 21 želv indických sloních, platí-li pro jejich srovnávání následující pravidla. Zástup musí uzavírat a začínat želva africká sloní. Žádné dvě želvy indické sloní nepůjdou bezprostředně po sobě, žádný celistvý úsek zástupu nesmí být tvořen 31 po sobě jdoucími želvami africkými sloními.

Výsledek. $\binom{49}{21}$

Návod. Nejprve zafixujeme jednu želvu africkou sloní na začátek. Pak utvoříme dvojice želva indická a bezprostředně za ní želva africká a tyto dvojice spojíme do jednoho člena zástupu. Tím nám zbyde 28 nezařazených afrických želv. Ty můžeme do zástupu zařadit libovolně promíchané s 21 spojenými dvojcemi. Podmínka na poslední želvu africkou je okamžitě splněna a případ 31 želv afrických po sobě nastat nemůže, nejvýše se jich seřadí 28 volných a jedna z dvojice.

Úloha 13. Trojúhelníku ABC připišme kružnici ke straně a. Ta se strany a dotkne v bodě D. Dokažte, že úsečka AD půlí obvod trojúhelníka.

Výsledek. Proste se to spocita.

Návod. Označme zvyšné body dotyku B' resp. C'. $|BD| = |BB'|$, $|CD| = |CC'|$, takže $|AB| + |BD| = |AB'|$, $|AC| + |CD| = |AC'|$. Ale tieto úsečky sú obe dotyčnice k našej kružnici z bodu A, takže sa dĺžky rovnajú.

Úloha 14. Môže existovať nekonštantný polynóm p s celočíselnými koeficientami taký, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $p(n)$ prvočíslo?

Výsledek. Nemôže + dôkaz.

Návod. Označme $p(1) = m$, m je nejaké prvočíslo. Špeciálne $m|p(1) \Rightarrow m|p(1 + km)$, čo je pre nejaké veľké k spor. (Pozn: mohlo by sa totiž stať $p(1) = p(1 + m)$.)

Úloha 15. Představ si půdorys bytu – místnosti, obvodové zdi a zakreslené dveře. Ukaž, že pokud z každého pokoje vede sudý počet dveří, pak má byt sudý počet východů.

Výsledek. Důkaz.

Návod. Byt je graf. Místnosti vrcholy, dveře hrany. V každém grafu je sudý počet vrcholů lichého stupně, všechny místnosti mají stupeň sudý $\rightarrow$ ven vede sudý počet hran = dveří.

Úloha 16. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y.$$

Výsledek. $f(x) = x + c$

Návod. Dosadíme $[0, y]$ a $[0, -y]$ a dostaneme rovnice

$$f(y) + 2f(-y) = 3f(0) - y,$$
$$f(-y) + 2f(y) = 3f(0) + y.$$

Ty se nějak dají posčítat a poodčítat tak, aby nám z toho vypadlo $f(y)$ (například odečteme-li první rovnici od dvojnásoku druhé a vydělíme-li to třemi). Vyjde $f(y) = y + f(0)$ a zkouškou ověříme, že skutečně všechny funkce tvaru $f(x) = x + c$ vyhovují naší rovnici.

Úloha 17. Na kružnici leží n bodů. Vybereme náhodně tři z nich a označíme je A, B, C. Označíme ještě rovněž náhodně některé ze tří zbývajících $n - 3$ bodů K, L, M. Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že se trojúhelníky ABC a KLM protínají.

Výsledek. $7/10$

Návod. Libovolných šest různých bodů z kružnice můžeme pospojovat do dvou trojúhelníků deseti způsoby. Z těchto se protíná vždy právě sedm.

Úloha 18. Miško dostal polynóm $P(x) = \frac{1}{12}(13x^2 + 23x - 36)$. Zistite súčet koeficientov polynómu

$$\underbrace{P(P(\dots P(P}_{2009}(x))\dots))$$

Výsledek. -3

Návod. Aby sme zistili súčet koeficientov polynómu, stačí za x dosadiť 1. $P(1) = 0$, $P(0) = -3$ a $P(-3) = 1$, takže $P(P(P(1))) = 1$. 2009 dáva zvyšok 2 po delení 3, takže súčet koeficientov nášho polynómu je $P(P(1)) = -3$.

Úloha 19. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= z,\\ (y+z)^3 &= x,\\ (z+x)^3 &= y.\end{aligned}$$

Výsledek. $x = y = z = 0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Návod. Nejprve si zvolíme BÚNO $x \geq y$ a tedy $x \geq y = (z+x)^3 \geq (y+z)^3 \geq x$, jenže toto může platit jen pro rovnost a tedy $x = y$. Podobně dokážeme $x = z$ a tedy $x = y = z$ a nyní jen dosadíme a dostaneme $8x^3 = x \Rightarrow x(x - \frac{1}{2\sqrt{2}})(x + \frac{1}{2\sqrt{2}})$.

Úloha 20. Rozhodni, zda může být posloupnost 1 2 2 3 3 3 5 6 8 9 10 skórem grafu. Pokud ano, nakresli ho a pokud ne, dokaž. (Skóre grafu dostaneme tak, že seřadíme stupně jeho vrcholů vzestupně za sebe.)

Výsledek. Ne.

Návod. Graf má 11 vrcholů. Nakreslím 10 a 9 – to je jednoznačné. 8 může jít buď z vrcholu, ze kterého teď vede jen jedna hrana (tím se ale určitě rozbije začátek skóre, spor) nebo z nějakého, kam teď vedou dvě (Zbyde mi jeden vrchol stupně 1, jeden stupně 2 a 6 stupně tři. Když se ale podívám na začátek posloupnosti, potřebuji dva vrcholy stupně 2. Spor.)

Úloha 21. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Zjistěte možné hodnoty výrazu $(2n+1, n+7)$. *Pozn.:* (a, b) značí největšího společného dělitele čísel a, b.

Výsledek. $1, 13$.

Návod. S použitím Eukleidova algoritmu dostaneme $(2n+1, n+7) = (n+7, n-6) = (n-6, 13)$. Výraz může být tedy roven 1 (pokud je $n-6$ nesoudělné s 13) nebo 13 (pokud 13 dělí $n-6$).

Úloha 22. Poťouchlý Donatelo si nepere ponožky, a proto mu už zase došly. Proto ukradl část ponožek svým kamarádům z jejich šuplíků a zamíchal je, aby na něj nepadlo podezření. Ponožky Leonarda, Michelangela a Rafaela (každý z nich má $2n+1$ ponožek v jedné barvě) přerozdělil do jejich tří šuplíků a některé dal do svého šuplíku. Kolika způsoby to může udělat, víme-li, že ponožky jsou v šuplíku vždy seřazeny a že si Donatelo ukradl alespoň jednu ponožku?

Výsledek. $\binom{6n+3}{2n+1}\binom{4n+2}{2n+1}\binom{6n+5}{3}$

Návod. Nejprve seřadíme ponožky do posloupnosti. Vlastně si z $6n+3$ ponožek $2n+1$ obarvíme na Leonardovu bravu. Ze zbývajících $4n+2$ ponožek $2n+1$ obarvíme na Michelangelovu barvu. Zbylé budou Rafaelovy. Ještě do posloupnosti potřebujeme zařadit 3 přepážky na rozdělení úseků příslušným šuplíkům. Ty ale nemůžeme zařadit libovolně, ale za 3. přepážkou (úsek příslušný Donatelovi) musí zbýt alespoň jedna ponožka. Proto vyloučíme jednu ponožku na konci posloupnosti a přepážky zamícháme jen s $6n+2$ ponožkami před ní. Součin počtu možností jednotlivých kroků dává výsledek.

Úloha 23. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Výsledek. $(x, y) = (0,0), (1,0), (0,1), (2,1), (1,2), (2,2)$.

Návod. Vynásobme celou rovnici dvěma. Dostaneme $2x + 2y = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, po úpravě $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Tedy jeden z výrazů $(x-y), (x-1), (y-1)$ je roven 0 a zbylé dva jsou rovny ± 1. Rozebereme všechny možnosti.

Úloha 24. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD, AB \perp AD, |AB| > |CD| \geq |DA|$). Označme postupně e, f, g, h osy úhlů z vrcholů A, B, C, D. Nechť $e \cap f = S, g \cap h = T, e \cap h = U, f \cap g = V, h \cap AB = E$. Dokažte, že body B, E, S, T leží na jedné kružnici. (nápověda: Dokažte $AB||UV$)

Výsledek.

Návod. $|UCD| = |UAD| = |UAB|$, obdobně $|VCD| = |VBC| = |VAB|$. Z toho $AB||UV$ a $|\sphericalangle TUV| = |\sphericalangle TEB|$. $UTVS$ je tětivový, ($|\sphericalangle SUT| = |\sphericalangle SVT| = 90°$) a proto $|\sphericalangle TUV| = |\sphericalangle TSV|$. $|\sphericalangle TEB| = |\sphericalangle TSB|$, takže $BEST$ je tětivový.

Úloha 25. Dokažte (všechna čísla jsou přirozená)

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Výsledek. Důkaz

Návod. 1. řešení: Stačí porovnat koeficient u x^r v polynomu $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$. Důvod, proč to chceme, je, že posloupnost $a_k = \binom{m}{k}$ má vytvořující funkci $a(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \cdots + \binom{m}{m}x^m = (1+x)^m$, posloupnost $b_k = \binom{n}{k}$ má vytvořující funkci $b(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$ a posloupnost $c_r = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ má vytvořující funkci $a(x)b(x) = (1+x)^{m+n}$.

2. řešení: Kombinatoricky. V parlamentu je m komunistů a n demokratů, kolika způsoby lze vybrat r-člennou komisi? Na pravé straně je součet přes všechny komise skládající se z k komunistů a $r-k$ demokratů.

Úloha 26. Mejme trojúhelník ABC a na kružnici opsané zvolme bod P. Dokažte, že paty kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC leží na jedné prímce.

Výsledek.

Návod. BÚNO P leží na kratším oblouku BC. Paty kolmic na AB, BC, AC si postupne oznacme K, L, M (M leží vne a K leží uvnitr kružnice). Necht $|\sphericalangle ABP| = \alpha$, pak $|\sphericalangle ACP| = 180° - \alpha$ a $|\sphericalangle MCP| = \alpha$. Z tetivového ctyrúhelníku $LPMC$ $|\sphericalangle CLP| = \alpha$. Z tetivového ctyrúhelníku $KBPL$ $|\sphericalangle KLP| = 180° - \alpha$. Díky tomu $|\sphericalangle KLM| = 180°$.

Úloha 27. Najděte největší $n \in \mathbb{N}$, pro které je výraz $n^2 - 19n + 89$ druhou mocninou celého čísla.

Výsledek. 11.

Návod. Pro $n = 11$ je výraz roven 1, a tedy je druhou mocninou celého čísla. Pokud $n > 11$, lze snadno ukázat, že platí $(n-10)^2 < n^2 - 19n + 89 < (n-9)^2$. Odtud plyne, že $n^2 - 19n + 89$ nemůže být čtverec pro $n > 11$.

Úloha 28. Osy vnitřních úhlů trojúhelníka ABC protnou protější strany postupně v bodech K, L, M. Z těchto bodů vedeme tečny ke kružici vepsané různé od stran trojúhelníka ABC. Body dotyku nazveme po řadě X, Y, Z. Dokažte, že přímky AX, BY, CZ procházejí jedním bodem.

Výsledek. Důkaz

Návod. Vyúhlí se rovnoběžnost mezi XY a AB a analogicky u všech ostatních. Pak se řekne, že existuje stejnolehlost mezi ABC a XYZ a jejím středem všechny tři přímky určitě procházejí.

Úloha 29. Kenny s Pepou si byli koupit svačinu. Pepa měl zaplatit 37 Kč a Kenny 47 Kč. Kenny se podíval do svojí peněženky a zjistil, že v ní má spoustu (stovky :)) pětikorun, dvoukorun a korun, ale už žádné jiné mince. Na chvíli se zamyslel, o kolik více způsoby může zaplatit svojí svačinu, než by mohl zaplatit Pepovu, ale na řešení nepřišel. Poraďte mu.

Výsledek. 46

Návod. Řešení: Vytvořující funkce je $(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} =: a(x)$. V ní se chceme podívat na koeficient u x^{47} a potom na koeficient u x^{37}. Vezmeme proto $a(x) - x^{10}a(x)$ a podíváme se na koeficient u x^{47}. Rozklad na parciální zlomky dá

$$\frac{1-x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \frac{(1+x^5)}{(1-x)^2(1+x)} = (1+x^5)\left(\frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2(1-x^2)}\right) =$$

$$= \frac{1+x^5}{2}\left(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+1+x^2+x^4+x^6+\dots\right).$$

Koeficient u x^{47} vyjde 46.

Úloha 30. V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k, l, přičemž k leží uvitř l. Buď m kružnice, která má s kružnicemi k, l vnitřní dotyk postupně v bodech K, L. Dokažte, že přímka KL prochází pevným bodem nezávislým na volbě m.

Výsledek. Důkaz.

Návod. Složením dvou stejnolehlostí s kladnými koeficienty vzniká stejnolehlost s kladným koeficientem a se středem na spojnici dílčích středů (to je „známé“ tvrzení). $K : k \Rightarrow m, L : m \Rightarrow l$ Přímka KL tedy prochází středem té normální stejnolehlosti mezi k a l.

Úloha 31. Nechť AK, BL, CM jsou výšky ostroúhlého trojúhelníka ABC a H jeho ortocentrum. $S = BL \cap KM$, P je střed AH a $T = LP \cap AM$. Dokažte $TS \perp BC$.

Výsledek. Je potřeba ukázat, že TMLS je tětivový.

Návod.