Úloha 1. [Miško] Majme rekurentne definovanú postupnosť $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nájdite a_{2009}

Výsledek. Postupnosť je periodická s periódou 7, $a_{2009} = a_3 = -1$.

Úloha 2. [Monča] Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Výsledek. NE

Úloha 3. [Tomášek] Jaké číslo se skrývá na místě označeném x v normálním magickém čtverci:

8		
x	7	

Výsledek. 6

Úloha 4. [Franta] Bodem R vedou kolmé přímky p, q, v bodě R' se rovnoměrně otáčejí kolmé přímky p', q'. Označme $P = p \cap p'$ a $Q = q \cap q'$. Existuje nějaká vzájemná korepondence pohybu bodů P a Q? Jak se pohybuje střed úsečky PQ?

Výsledek.

Úloha 5. [Luboš] Na množině $C = \{2, 3\}$ jsou definovány binární operace následujícími tabulkami.

x	y	$x * y$
2	2	3
2	3	2
3	2	3
3	3	2

x	y	$x \circ y$
2	2	2
2	3	3
3	2	3
3	3	3

Rozhodněte, zda jsou binární operace komutativní, asociativní. Určete neutrální prvky obou operací. Rozhodněte, zda je binární operace $u = x * y$ na C distributivní vůči binární operaci $u = x \circ y$ na C.

Výsledek. Operace $u = x * y$ na C není komutativní, není asociativní, neexistuje k ní neutrální prvek. Operace $u = x \circ y$ na C je komutativní, je asociativní a její neutrální prvek je 2. Operace $u = x * y$ na C není distributivní vůči binární operaci $u = x \circ y$.

Úloha 6. [Tomášek] Kolik nul bude na konci čísla $\binom{113}{81}$?

Výsledek. 7

Úloha 7. [Háňa] Obdélník $ABCD$ je rozložen na tři shodné čtverce $AEHD$, $EFGH$ a $FBCG$. Určete součet $|\sphericalangle EAH| + |\sphericalangle FAG| + |\sphericalangle BAC|$, aniž byste používali goniometrické funkce.

Výsledek.

Úloha 8. [Pavel] Pro $\lambda \geq 8$ a a, b, c kladná dokažte

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \lambda ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda ab}} \geq \frac{3}{1 + \lambda}$$

Výsledek.

Úloha 9. [Jarda] Mějme zahradu tvaru kruhu o poloměru 60 metrů takovou, že v každém mřížovém bodě krom počátku (počátek = střed zahrady) stojí strom. Jaký nejmenší poloměr musí mít stromy (všechny mají stejný poloměr), aby přes ně nebylo ze středu zahrady vidět mimo zahradu?

Výsledek. $\frac{15}{4}$.

Úloha 10. [Alča] Kolik řešení (v celých číslech) má následující rovnice $(2x-1)^2+(x+2)^2=y^2+4$?

Výsledek. nekonečně mnoho

Úloha 11. [Luboš] Určete, kolik existuje navzájem různých booleovských funkcí o n proměnných ($n \in \mathbb{N}$) na množině D, kde $D=\{0,1\}$ je množina obou neutrálních prvků.

Výsledek. 2^{2^n}

Úloha 12. [Alča] Najdi všechna řešení rovnice $a^2-2b^2=1$, kde $a,b \in \mathbb{N}_0$ a $a,b \leq 100$.

Výsledek. $(1,0),(3,2),(17,12),(99,70)$

Úloha 13. [Kenny] Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka jsou kolmé, právě když se rovnají délky spojnic středů protějších stran.

Výsledek.

Úloha 14. [Dominik] Rozveďte číslo $\sqrt{2}$ do řetězového zlomku.

Výsledek. [1;2,2,2,...]

Úloha 15. [Pirát] Koľkými spôsobmi je možné na biele polia šachovnice 8×8 postaviť 8 (rovnakých) veží tak, aby sa žiadne dve navzájom neohrozovali?

Výsledek. $4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576$

Úloha 16. [Kenny] Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník. Označme $M_1, M_2, \ldots M_6$ postupně středy stran AB, BC, ..., FA. Ukažte, že trojúhelníky $M_1M_3M_5$, $M_2M_4M_6$ mají společné těžiště.

Výsledek.

Úloha 17. [Miro] V hre lotto vyberáme 6 čísel z 49. Koľko je takých kombinácií, ktoré obsahujú najmenej jeden pár po sebe idúcich čisel?

Výsledek. $\binom{49}{6}$ - $\binom{44}{6}$

Úloha 18. [Zuzka] Nájdite korene rovnice $5x^3-8x^2-2x+3=0$.

Výsledek. $0,6;\ -0,62;\ 1,62$

Úloha 19. [Pirát] Niektoré políčka nekonečnej štvorcovej tabuľky sú ofarbené na čierno, zvyšné sú biele. Každý obdĺžnik 2×3 resp. 3×2 obsahuje práve 2 čierne políčka. Koľko čiernych políčok môže obsahovať obdĺžnik 9×11?

Výsledek. Musi obsahovat 33 policok.

Úloha 20. [Háňa] Je dán čtverec $ABCD$ a K libovolný bod strany CD. Osa úhlu BAK protíná stranu BC v bodě L. Dokažte, že $|BL|+|DK|=|AK|$.

Výsledek.

Úloha 21. [Tomášek] Najdi všechny kořeny rovnice $7\lfloor x \rfloor = 10x$.

Výsledek. 0, -7/10, -14/10, -21/10

Úloha 22. [Dominik] Na úsečce AC zvolme libovolný vnitřní bod D. Ukažte, že obsah útvaru mezi půlkružnicí sestrojenou nad poloměrem AC a půlkružnicemi sestrojenými nad poloměry AD a DC je roven obsahu kružnice o poloměru BD, kde bod B je průsečík kolmice k AC vedené bodem D a půlkružnice sestrojené nad AC.

Výsledek. Buď chvilka počítání nebo by se asi daly využít Vietovy vzorce

Úloha 23. [Zuzka] Nájdite korene rovnice $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = 0$.

Výsledek. $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3})$

Úloha 24. [Kenny] Ukažte, že v lichoběžníku platí

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

kde e, f jsou délky úhlopříček.

Výsledek.

Úloha 25. [Pavel] Pro kladná a, b, c dokažte

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c)$$

Výsledek.

Úloha 26. [Miško] Skúmajme postupnosť $a_0 = 2009^{2009}$, a_{n+1} je ciferný súčet a_n. Táto postupnosť je od nejakého členu konštantná. Aká je táto konštanta?

Výsledek. Uvedomíme si, že cif. súčet zachováva zvyšok po delení 9. $2009^{2009}\ mod\ 9 \equiv 2^{2009\ mod\ 6} \equiv 2^5 \equiv 25 \equiv 6$

Úloha 27. [Kenny] Buď $ABCDEF$ konvexní šestiúhelník o obvodu P. Označme $M_1, M_2, \ldots M_6$ postupně středy stran $AB, BC, \ldots, FA$. Má-li $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ shodné všechny vnitřní úhly, ukažte, že trojúhelníky ACE a BDF jsou rovnostranné.

Výsledek.

Úloha 28. [Pavel] Pro kladná x, y, z dokažte

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

Výsledek.

Úloha 29. [Jarda] Buď $C \subset \mathbb{R}^d$ omezená (kompaktní) konvexní množina, buď $p \in C$. Dokažte, že existuje přímka l procházející bodem p taková, že úsečka $l \cap C$ je nejdelší ze všech úseček obsažených v C a rovnoběžných s l.

Výsledek.

Úloha 30. [Franta] Bodem R vedou přímky p, q, a v bodě R' se otáčejí přímky p', q', které si zachovávají svůj úhel. Označme $P = p \cap p'$ a $Q = q \cap q'$. V tomto označení navíc platí, že jsou všechny čtyřúhelníky $PRQR'$ tětivové. Jak se pohybuje střed kružnice opsané čtyřúhelníku $PRQR'$?

Výsledek.

Úloha 31. [Miro] Nech $1 \leq k \leq n$. Uvažujme všetky postupnosti so súčtom n. Koľko je takých, ktoré obsahujú číslo k?

Výsledek. $(n - k + 3) \cdot 2^{n-k-2}$

Úloha 32. [Dominik] Před kotoučem o poloměru h, který se otáčí konstantní rychlostí, je v rovině tohoto kotouče umístěna úsečka délky $2h$ tak, že přímka spojující střed kotouče se středem úsečky je na tuto úsečku kolmá. Po tečně ke kružnici odlétne v náhodný okamžik částice. Úsečka je od kotouče ve vzdálenosti h. Určete pravděpodobnost, že částice zasáhne úsečku.

Výsledek. ted se to snazim pocitat, nekdy uz mi to vyslo, ale ted se tomu nechce. Ale asi jsem jen unavenej, nez ze by to bylo extra tezky

Úloha 33. [Pavel] Pro kladná x, y, z dokažte

$$\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{y}{(y+z)^2} + \frac{z}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(x+y+z)}$$

Výsledek.

Úloha 34. [Dominik] Pomocí kvadratix, pravítka a kružítka rozdělte zadaný úhel na třetiny (stačí ukázat pro ostrý úhel).

Výsledek. Vrchol úhlu si umístím do počátku a jedno jeho rameno na osu x. Z průsečíku druhého ramene a kv. spustím kolici na x a vzdálenost od paty této kolmice k průsečíku kv. a x rozdělím na třetiny. Vypustím kolmice nahoru a spojím průsečíky s počátkem, hotovo, vyplývá to z definice kv.

Úloha 35. [Miško] Označme c najväčší reálny koreň polynómu $x^3 - 3x^2 + 1$. Dokážte, že číslo $\lfloor c^{1988} \rfloor$ je deliteľné 17.

Výsledek. Poznáme symetrické polynómy, dokážeme vyjadriť $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$ ako rekurentnú postupnosť. λ_1 a λ_2 sú menšie než 0, takže stačí ukázať $s_{1988} \equiv 1$ $(mod\ 17)$.

Úloha 36. [Luboš] Dokažte tzv. *de Morganovy zákony.* Pro libovolnou podmnožinu N množiny $\hat{M}$, což je množina všech podmnožin neprázdné množiny M, platí:

$$(\bigcup_{A \in N} A)' = \bigcap_{A \in N} A', \quad (1.)$$

$$(\bigcap_{A \in N} A)' = \bigcup_{A \in N} A'. \quad (2.)$$

Výsledek.

Úloha 37. [Monča] Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

Výsledek. Uprostřed

Úloha 38. [Franta] Ve čtyřúhelníku $ABCD$ neplatí $BC \parallel AD$. Na stranách BC a AD se po řadě pohybují body E a F tak, že platí $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|DF|}{|FA|}$. Dále označme $P = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$, $Q = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EF}$, $R = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Dokažte, že všechny kružnice opsané trojúhelníkům PQR mají ještě jeden společný bod (různý od P).

Výsledek.

Úloha 39. [Pirát] Nájdite všetky funkcie $f : R \to R$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

Výsledek. Nejake linearne. Navod: obor hodnot R, proste, dosadime f(y) = -1.

Úloha 40. [Rokyta] Rozdeľte kružnicu na dve množiny tak, aby sa z nich (posúvaním a otáčaním v rovine) dala poskladať kružnica bez jedného bodu. (Po zložení sa obe množiny nesmú prekrývať v žiadnom bode.)

Výsledek. Vie to Misko a Pavel.