Příklad 1. Mějme kvádr $ABCDEFGH$ se stranami 1,2,3. Určete součet úhlů $\sphericalangle BAF + \sphericalangle CAD + \sphericalangle EAH$ naprosto přesně pomocí nejvýše jednoho výrazu (tedy ne jako součet více výrazů).

Příklad 2. Určete součet

$$\binom{42}{1} + \binom{42}{4} + \binom{42}{7} + \cdots + \binom{42}{40}.$$

Příklad 3. Najděte všechny komplexní kořeny polynomu

$$x + 2x^2 + \cdots + 1003x^{1003} + 1004x^{1004} + 1003x^{1005} + \cdots + 2x^{2006} + x^{2007}$$

včetně jejich násobností.

Příklad 4. Siedmi trpaslíci z rozprávky o Snehulienke sa vracajú domov rozhnevaní. Trpaslík Vedko sa pohádal s Kýblikom, Šťastkom a Hapčím, trpaslík Plaško sa pohádal s Kýblikom, Dudrošom a Spachtošom, trpaslík Dudroš so Spachtošom a Hapčím a napokon trpaslík Šťastko tiež s Hapčím. Tí, ktorí sa pohádali, nechcú sedieť vedľa seba. Naproti tomu chcú vedľa seba sedieť Plaško a Hapčí a Kýblik s Dudrošom. Je možné, aby si sadli všetci okolo jedného stola?

Příklad 5. Označme G těžiště trojúhelníku ABC. Dokažte

$$|AG|^2 + |BG|^2 + |CG|^2 = \frac{1}{3}(|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2).$$

Příklad 6. Dokažte

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}.$$

Příklad 7. Výrobce bonboniér dává do každé z nich náhodně jednu z 20 fotografií. Jaká je střední hodnota počtu bonboniér, které si bude muset sběratel koupit, pokud chce všechny získat?

Příklad 8. Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC je zvoleno 6 bodů. Na straně a body A_1, A_2, na straně b body B_1, B_2 a na straně c body C_1 a C_2. Tyto body tvoří vrcholy konvexního šestiúhelníka jehož strany mají všechny stejnou délku. Dokažte, že přímky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 procházejí jedním bodem. (Zkuste vhodně zkombinovat vhodné kosinové věty)

Příklad 9. Koľkými spôsobmi sa číslo 1000 dá napísať ako súčet dvoch štvorcov? Štvorec je číslo, ktoré sa dá napísať ako druhá mocnina celého čísla.

Příklad 10. Mějme permutaci A,

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13 \\ 13, & 4, & 7, & 5, & 2, & 1, & 11, & 9, & 8, & 10, & 3, & 6, & 12 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte řád a znaménko permutace A, řád a znaménko permutace A^{42} a řád a znaménko permutace A^{424}.

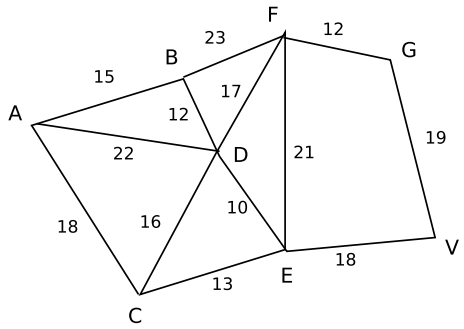
Příklad 11. V rovine je daný tupý uhol AKS. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS, aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC.

Příklad 12. Je dán $\triangle ABC$ a M střed strany BC. Na straně AB nalezněme bod N takový, že $|\sphericalangle MNA| = \frac{\beta}{2}$. Dokažte, že úsečka MN dělí obvod trojúhelníka ABC napůl. (Nápověda: Archimedova věta)

Příklad 13. Tři kovbojové se účastní souboje, stojí v trojúhelníku. První z nich zasáhne s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, druhý zasáhne s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a poslední s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Aby souboj byl spravedlivý, střílí kovbojové v pořadí od nejhoršího po nejlepšího, pořád dokola, dokud není na živu jenom jeden. Každý kovboj si vždycky vybere jednoho z přeživších kovboju, zkusí na něj vystřelit, nebo může vystřelit do vzduchu. Jaká je optimální strategie nejhoršího kovboje?

Příklad 14. Zobecněte úlohy na Ptolemaiovu větu na pravidelný n–úhelník.

Příklad 15. Navrhnite rozvoz potravinárskeho tovaru z veľkoskladu do jednotlivých obchodných stredísk jediným autom, ktoré začína aj končí svoju cestu vo veľkosklade V, každý zo zásobovaných obchodov musí prejsť práve raz a má najazdiť čo najmenej kilometrov.



Příklad 16. Aký je súčet všetkých komplexných deliteľov čísla 424242?

Příklad 17. Určete maximální počet samodružných prvků permutace Π na množině o 138 prvcích, víme-li, že je sudá a že její řád je roven 6006.

Příklad 18. Pan Podivný má n stejně vypadajících klíčů, ale pouze jeden z nich otevře dveře od jeho domu. Postupuje tedy tak, že si vybere náhodný klíč a zkusí ho. Pokud se mu s ním dveře nepovede otevřít, vrátí klíč zpět k ostatním a znovu vybírá z původních n klíčů. Jaká je střední hodnota počtu pokusů potřebných k otevření dveří?

Příklad 19. (Calábek) Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Na stranách AB a BC jsou zvoleny body M a N tak, že $MN||AC$ a zároveň platí

$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = 2.$$

Označme O průsečík přímek CM a AN. Na úsečce ON zvolme bod K tak, že platí $|MO|+|OK| = |KN|$. Označme dále T průsečík kolmice k přímce ON procházející bodem K s osou úhlu ABC. Dokažte, že úhel MTB je pravý. (Nápověda: Archimedova věta)

Příklad 20. Dokažte, že jestliže $a + b + c = 1$, pak

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Příklad 21. Mějme n míst uspořádáných do kruhu. V jednom místě stojí vlk, který koná náhodnou procházku, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ se pohne vlevo a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vpravo. Jestliže dorazí na místo, kde ještě nebyl, najde tam ovečku a sní ji. Kam se má postavit chytrá ovečka[1], aby byla s největší pravděpodobností sežrána naposledy, tedy na jaké místo přijde vlk s největší pravděpodobností naposledy?

[1]Která zná dobře pravděpodobnost.

Příklad 22. Uhlopriečky daného lichobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P. Bod Q leží medzi rovnobežnými priamkami BC a AD tak, že $|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle CQB|$ a body P a Q ležia v opačných polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle DAQ|$. (Napoveda: rovnoľahlosť)

Příklad 23. V trojúhelníku ABC vypočtěte vzdálenost středů kružnice vepsané a kružnice opsané jen pomocí jejich poloměrů. (Nápověda: mocnost)