# NP-úplnost

*Šárka Štěpánová*

Už jste asi někdy slyšeli pojem, že nějaká úloha je NP-úplná. Na této přednášce si povíme, co to vlastně znamená a jak se taková úloha pozná.

Jak se definuje pojem *Turingova stroje* přesně se můžete dozvědět na přednášce Petra Šimečka. Pro naše účely tento pojem velmi zjednodušíme:

**Definice.** *Deterministický TS (DTS) je krabička, která čte znaky a podle toho se rozhoduje, co udělá — může změnit svůj stav, přepsat znak na poli nebo se posunout o pole vedle — je dáno, co v dané situaci udělá. TS skončí úspěšně, neúspěšně, nebo neskončí. Nedeterministický TS (NTS) je skoro to samé s tím rozdílem, že má více možností co v dané situaci dělat a on si jednu z nich vybírá.*

**Úmluva.** Symbolem $p(n)$ budeme vždy rozumět libovolný polynom, který závisí na $n$ — velikosti vstupu.

**Definice.** *Úloha $U$ je polynomiálně převoditelná na $V$ (značíme $U \propto V$), pokud existuje DTS takový, že v čase $p(n)$ převede vstupy úlohy $U$ na vstupy úlohy $V$. Třída úloh $P$ obsahuje ty úlohy, pro něž existuje DTS, který v čase $p(n)$ rozhodne, zda má daná úloha řešení. Třída úloh $NP$ obsahuje ty úlohy, pro níž existují NTS a výběr postupu co má dělat tak, že NTS rozhodne v čase $p(n)$, zda má daná úloha řešení. Je-li $U$ NP-úplná, pak platí:* $(U \in NP \wedge U \in P) \Rightarrow NP = P$.

Tedy pokud bychom dokázali, že existuje NP-úplná úloha, která je polynomiálně řešitelná, pak bychom dokázali, že každá úloha NP je P! Z definice ale není hned vidět, zda nějaká NP-úplná úloha vůbec existuje.

**Věta.** (Cook) *Splnitelnost Boolovských formulí je NP-úplná úloha.*

Chceme-li nyní dokázat, že nějaká úloha $U$ je NP-úplná, stačí dokázat, že $V$, o které víme, že je NP-úplná, je na $U$ polynomiálně převoditelná.

Tak na přednášce podle času dokážeme NP-úplnost některých z následujících úloh: 3-SAT, 1-IN-3-SAT, NAE-SAT (splnitelnosti různých typů formulí), Vertex-cover (zda v daném grafu existuje množina vrcholů velikosti $k$ tak, aby pro každé $e$ platilo $e \cap A \neq \emptyset$), existence nezávislé množiny velikosti $k$ v grafu, zda lze daný graf obarvit 3 barvami, zda v grafu existuje Hamiltonovská kružnice ...