Muirheadova věta

Libor Barto

Většina z vás se jistě potkala s nerovnostmi, kde se na obou stranách vyskytují symetrické polynomy téhož stupně (příkladem je známá AG-nerovnost). Velice účinou zbraní je v těchto příkladech právě Muirheadova věta.

Definice. *Uspořádanou n-tici $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ reálných čísel, pro která $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ nazveme multiindexem délky n. Součtu $|A| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ říkáme výška (multiindexu A).*

Definice. *Nechť $A = (a_1, \ldots, a_n)$ a $B = (b_1, \ldots, b_n)$ jsou multiindexy stejné výšky. Řekneme, že multiindex A je menší než multiindex B (píšeme $A < B$), pokud platí*

$$\begin{aligned} a_1 &\leq b_1, \\ a_1 + a_2 &\leq b_1 + b_2, \\ &\vdots \\ a_1 + \cdots + a_{n-1} &\leq b_1 + \cdots + b_{n-1}, \end{aligned}$$

a alespoň jedna z nerovností je ostrá.

Poznámka. Ne každé dva multiindexy téže výšky lze porovnat.

Definice. *Nechť $A = (a_1, \ldots, a_n)$ je multiindex. Symetrickým polynomem příslušným multiindexu A rozumíme mnohočlen*

$$S_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace čísel $1, 2, \ldots, n$.

Věta. (R. F. Muirhead, 1903) *Nechť A, B jsou multiindexy takové, že $A < B$. Pak pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí*

$$S_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq S_B(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

K důkazu Muirheadovy věty bude zejména zapotřebí následující větu.

Věta. (Vážená AG-nerovnost) *Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou kladná (reálná) čísla, pro něž $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1$ (tzv. váhy). Pak pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí*

$$x_1^{v_1} x_2^{v_2} \cdots x_n^{v_n} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n,$$

rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Váženou AG-nerovnost lze dokázat použitím (obyčejné) AG-nerovnosti, pokud jsou váhy racionální. Obecně bychom potřebovali vědět něco o spojitosti funkcí, nebo použít *Jensenovu nerovnost*, o které se na přednášce (možná) také zmíním:

Věta. (Jensenova nerovnost) *Nechť* f *je ryze konvexní funkce na intervalu* I *a nechť* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *jsou váhy. Potom pro libovolná čísla* $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ *platí*

$$f(v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n) \leq v_1 f(x_1) + v_2 f(x_2) + \cdots + v_n f(x_n),$$

rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Poznámka. Pro ryze konkávní funkci platí opačná nerovnost.