Mřížové body a teorie čísel

Pavel Podbrdský

V této přednášce si dokážeme několik zajímavých tvrzení z teorie čísel. Většinu z nich lze dokazovat mnoha způsoby, my si však předvedeme (mnohdy překvapivé) geometrické myšlenky, zejména tvrzení o mřížových bodech. Ve sborníčku najdete pouze seznam dokazovaných vět, důkazy si předvedeme na přednášce.

Věta. (Pickova formule) *Buď P mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech v rovině. Buď h počet mřížových bodů ležících na hranici P a u počet mřížových bodů ležících uvnitř P. Pak obsah mnohoúhelníku P splňuje následující vztah:*

$$S(P) = u + \frac{h}{2} - 1.$$

Definice. (Fareyovy zlomky) *Buď $n \in \mathbb{N}$. Seznam $\mathcal{F}_n$ všech zlomků zapsaných v základním tvaru $\frac{p}{q}$, kde $q \leq n$ nazýváme Fareyovy zlomky řádu n. Např.*

$$\mathcal{F}_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right).$$

Věta. (Fareyovy zlomky) *Jsou-li $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ dva sousední Fareyovy zlomky zapsané v základním tvaru, pak*

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \frac{1}{qs}.$$

Věta. (Minkowski) *Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ omezená konvexní množina, souměrná podle počátku ($M = -M$), $\mathrm{Vol}(M) > 2^n$. Pak existuje mřížový bod $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ takový, že $z \in M$.*

Věta. *Buď n přirozené číslo, které není dělitelné žádným prvočíslem p tvaru $p = 4k - 1$. Pak existují $a, b \in \mathbb{N}_0$ takové, že $n = a^2 + b^2$.*

Věta. (Lagrange) *Buď n libovolné přirozené číslo. Pak existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ takové, že $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.*