Monskyho věta

RADO VAN ŠVARC

ABSTRAKT. Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s Monskyho větou. V první části budeme budovat zdánlivě nesouvisející teorii. Ve druhé pak tuto teorii využijeme k důkazu věty.

Zamysleme se nad následující otázkou – pro jaká přirozená n umíme rozřezat čtverec na n trojúhelníků o stejném obsahu? Je jednoduché ukázat, že pro sudá n je to vždy možné. Jak je to ale s lichými?

Zdánlivě nesouvisející teorie

Definice. Nechť p je prvočíslo. Potom jako *p-valuaci* nazveme funkci $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takovou, že $v_p(0) = 0$ a pokud $r \neq 0$ je racionální číslo, pro které platí $r = p^k \frac{a}{b}$, kde k je celé číslo a a a b jsou celá čísla nedělitelná p, pak $v_p(r) = p^{-k}$.

Například $v_2(\frac{3}{4}) = 4$, $v_3(15) = \frac{1}{3}$ a $v_5(1) = 1$.

Definice. Funkci $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ nazveme *nearchimédovskou valuací*, pokud platí

(1) $(v(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,
(2) $v(xy) = v(x)v(y)$,
(3) $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$,

pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$.

Tvrzení. *Pokud v je nearchimédovská valuace a $v(x) \neq v(y)$, pak $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$.*

Rozšiřování p-valuace

Povšimněme si, že $v_p(x)$ naši definici nearchimédovské valuace téměř splňuje, pouze není definovaná v iracionálních číslech. Je možné tuto funkci vhodně na iracionálních číslech dodefinovat tak, že v_p zůstane nearchimédovskou valuací, ale my to dělat nebudeme. Vystačíme si se slabším tvrzením. Stále usilujeme o to, roztáhnout definiční obor na celé $\mathbb{R}$, ale místo $\mathbb{R}_0^+$ budeme za obor hodnot naší valuace požadovat jen nějakou množinu M, pro kterou platí $M = \{0\} \cup G$, kde G je uspořádaná abelovská grupa (tj. množina s násobením a dělením, u které umíme určit, co je větší a co je menší) a kde pro každé $a \in G$ platí $0 \cdot a = 0$ a $0 < a$.

Tvrzení. *Existuje nearchimédovská valuace* $w : \mathbb{R} \to M$ *taková, že* $w\left(\frac{1}{2}\right) > 1$.

Lemma. (Zornovo) *Mějme množinu* X. *O množině* R, *jejíž prvky jsou podmnožiny* X, *řekneme, že se jedná o řetězec, pokud pro každé dvě množiny* $A, B \in R$ *platí* $A \subset B$ *nebo* $B \subset A$.

Nechť S, *jejíž prvky jsou podmnožiny* X, *je neprázdná množina splňující následující podmínku: Pro každý řetězec* $R \subset S$ *platí* $\bigcup R \in S$. *Pak existuje maximální množina* $M \in S$. *(Maximální množinou rozumíme takovou, že pro žádnou jinou množinu* $A \in S$ *neplatí* $M \subset A$.*)*

A jdeme na to!

Věta. (Monskyho) *Není možné rozřezat čtverec na lichý počet trojúhelníků se stejným obsahem.*

Budeme pro spor předpokládat, že takové rozřezání je možné a budeme pracovat s takovýmto rozřezáním čtverce $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

Definice. Řekneme, že bod se souřadnicemi $[x, y]$ je obarven

(1) *modře*, pokud $w(x) \geq w(y), w(x) \geq w(1)$,

(2) *zeleně* , pokud $w(x) < w(y), w(y) \geq w(1)$,

(3) *červeně*, pokud $w(x) < w(1), w(y) < w(1)$.

Definice. Výraz

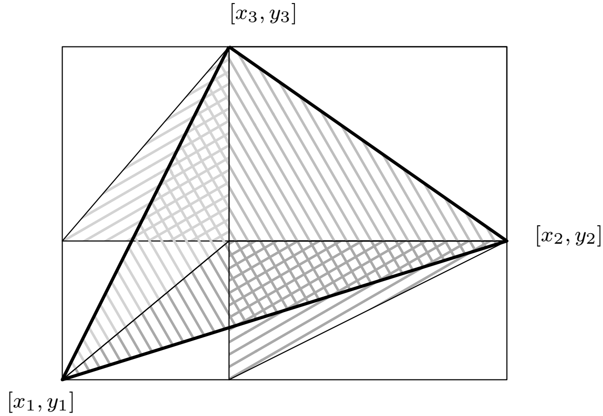
$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

budeme zkráceně značit jako

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Lemma. *Trojúhelník se souřadnicemi* $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$ *má obsah rovný*

$$\frac{1}{2}\big|(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)\big| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Definice. Jako *duhový trojúhelník* nazveme takový trojúhelník, jehož každý vrchol má jinou barvu.

Lemma. *Nechť* $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$ *jsou vrcholy duhového trojúhelníku. Potom*

$$w\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right) \geq 1.$$

Lemma. *V libovolném rozřezání čtverce se vyskytuje alespoň jeden duhový trojúhelník.*

Literatura a zdroje

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2010.