Mocnost bodu ke kružnici

Anh Dung „Tonda“ Le

Abstrakt. Příspěvek seznamuje se základními vlastnostmi mocnosti bodu ke kružnici a ilustruje její použití v geometrických úlohách.

Trocha teorie na úvod

Definice. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r. *Mocností* bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.

Poznámka. Pokud bod M leží vně, resp. uvnitř kružnice k, je číslo $p(M,k)$ kladné, resp. záporné. Leží-li bod M na kružnici k, je $p(M,k) = 0$.

Poznámka. Nechť M a N jsou dva různé body. Pak $p(M,k) = p(N,k)$, právě když $|MO| = |NO|$.

Tvrzení. *Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B. Pak platí*

$$p(M,k) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ vně } k, \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ uvnitř } k. \end{cases}$$

Jestliže speciálně M leží vně k a označíme T bod dotyku tečny ke kružnici k vedené bodem M, pak $p(M,k) = |MT|^2$.

Tvrzení. *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $M = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový, právě když $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.*

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X,k) = p(X,l)$ nazýváme *chordálou* kružnic k, l.

Tvrzení. *Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Příklady

Příklad 1. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P.

Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad 2. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 3. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme bod D. Nyní sestrojme kružnici k_1, která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D. Dále též kružnici k_2, která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné. (Hradiště 2007)

Příklad 4. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Ukažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k, leží na jedné přímce. (MO 56–A–I–5)

Příklad 5. Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

Příklad 6. Kružnice k a l jsou soustředné, přičemž k leží uvnitř l. Bodem $A \in l$ vedeme tečnu AB ke k, kde $B \in k$, jejíž druhý průsečík s kružnicí l označíme C. Dále buď D střed AB. Přímka procházející bodem A protne kružnici k v bodech E a F tak, že osy úseček DE a CF se protínají v bodě M na AB. Určete poměr $|AM|/|MC|$. (USAMO 1998)

Příklad 7. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty příslušných výšek. Zvolme bod P tak, aby přímka PB byla tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAC_0$ a přímka PC tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAB_0$. Dokažte, že AP je kolmá na BC. (MEMO 2011, MR&JT)

Příklad 8. Body P a Q leží na stranách CA a AB trojúhelníka ABC. Označme K, L a M postupně středy úseček BP, CQ a PQ. Dále předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KLM. Ukažte, že body P a Q jsou stejně vzdálené od středu kružnice opsané $\triangle ABC$. (IMO 2009)

Další příklady

Příklad 9. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (MKS 2005)

Příklad 10. Úhlopříčky nerovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Nechť A_1 je druhý průsečík kružnice opsané $\triangle BCD$ s přímkou AP, body B_1, C_1, D_1 definujeme obdobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je také lichoběžník. (Turnaj měst 2008)

Příklad 11. V trojúhelníku ABC je $|BC| = 20$. Kružnice vepsaná dělí těžnici AD na tři stejné části. Určete obsah trojúhelníku ABC. (AIME 2005)

Příklad 12. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku platí $OI^2 = R^2 - 2rR$ (kružnice opsaná se středem O má poloměr R, kružnice vepsaná se středem I má poloměr r).

Návody

1. Uvažujte mocnost z bodu P.

2. Přímka OM prochází bodem A.

3. Přímka DE prochází středem úsečky AB, použijte úsekové úhly.

4. Všechny zmíněné kružnice procházejí pevným bodem ležícím na přímce OA.

5. Viètovy vztahy, uvažujte mocnost od počátku souřadnic.

6. Dokažte, že $CDEF$ je tětivový.

7. Bod P je vlastně průsečík výšky z vrcholu A a Thaletovy kružnice nad BC.

8. Ukažte, že trojúhelníky MKL a AQP jsou si podobné.

9. Dokažte, že MQ je tečnou ke kružnici opsané BDQ.

10. Kombinujte čtyři rovnosti získané z mocností.

11. Uvažujte mocnosti z bodů A a D.

12. Tvrzení vlastně hovoří o mocnosti bodu I ke kružnici opsané.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem z příspěvku Pepy Tkadlece, Martiny Vaváčkové a Alči Skálové, kterým velice děkuji.