

Mocnost bodu ke kružnici

VERČA HLADÍKOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek seznamuje se základními vlastnostmi mocnosti bodu ke kružnici a ilustruje její použití v geometrických úlohách.

Trocha teorie na úvod

Definice. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r . Mocností bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M, k) = |MO|^2 - r^2$.

Poznámka. Pokud bod M leží vně kružnice k , je číslo $p(M, k)$ kladné. Pokud leží uvnitř k , pak je $p(M, k)$ záporné. Leží-li bod M na kružnici k , je $p(M, k) = 0$.

Poznámka. Necht' M a N jsou dva různé body. Pak $p(M, k) = p(N, k)$, právě když $|MO| = |NO|$.

Tvrzení. Necht' přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B . Pak platí

$$p(M, k) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ vně } k, \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{leží-li } M \text{ uvnitř } k. \end{cases}$$

Jestliže speciálně M leží vně k a označíme T bod dotyku tečny ke kružnici k vedené bodem M , pak $p(M, k) = |MT|^2$.

Tvrzení. Necht' $ABCD$ je čtyřúhelník a $M = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový, právě když $|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$.

Definice. Necht' k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X, k) = p(X, l)$ nazýváme *chordálou* kružnic k, l .

Tvrzení. Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.

Tvrzení. Uvažme tři kružnice k_1, k_2, k_3 . Pak jejich vzájemné chordály procházejí jedním bodem (nebo jsou všechny rovnoběžné). Tomuto bodu se říká *potenční střed* kružnic k_1, k_2, k_3 .

Příklady

Příklad 1. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B . Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l , která se jich dotýká v bodech T, U , v bodě P . Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad 2. Na prodloužení tětiny KL kružnice k se středem O leží bod A . Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U . Označme M střed úsečky TU . Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětíkový.

Příklad 3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E . Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC . Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$.

Příklad 4. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Na jeho odvěsně AC zvolme bod D . Nyní sestrojme kružnici k_1 , která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D . Dále též kružnici k_2 , která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D . Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2 . Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné. (Hradiště 2007)

Příklad 5. Tečny skrz A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T a U . Buď M střed AT . Úsečka MU protne k podruhé v bodě X . Dokažte, že $|XA| = 2 \cdot |MX|$.

Příklad 6. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v X, Y . Na přímce XY zvolíme bod P ($P \notin BC$). Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M , přímka BP kružnici nad BD v bodě N . Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem. (IMO 1995)

Příklad 7. V trojúhelníku ABC označme B_0, C_0 paty příslušných výšek. Zvolme bod P tak, aby přímka PB byla tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAC_0$ a přímka PC tečnou ke kružnici opsané $\triangle PAB_0$. Dokažte, že AP je kolmá na BC . (MEMO 2011, MR&JT)

Příklad 8. Body P a Q leží na stranách CA a AB trojúhelníka ABC . Označme K, L a M postupně středy úseček BP, CQ a PQ . Dále předpokládejme, že přímka PQ je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KLM . Ukažte, že body P a Q jsou stejně vzdálené od středu kružnice opsané $\triangle ABC$. (IMO 2009)

Příklad 9. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s kolmištěm H . Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem H protne BC v A_1, A_2 . Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Dokažte, že těchto šest bodů leží na kružnici. (IMO 2008)

Příklad 10. Je dána kružnice k a přímka p . Bod P se nachází na p . Tečny z P ke k se jí dotýkají v T a U . Uvažme kružnici se středem P procházející body T, U . Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí dvěma společnými body.

Příklad 11. Na straně BC trojúhelníka ABC s výškami BM, CN a kolmištěm H je dán bod W . Body X, Y jsou zvoleny tak, aby WX, WY byly průměry kružnic BWN , respektive CWM . Dokažte, že body X, Y, H leží na přímce. (IMO 2013)

Příklad 12. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q . Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem Q . Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k . Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (MKS 2005)

Příklad 13. Je dán trojúhelník ABC s vepsištěm I a opsíštěm O . Kolmice na AI skrz I protne BC v A' . Podobně definujeme B' a C' . Dokažte, že body A' , B' , C' leží na přímce kolmé na OI .

Příklad 14. Úhlopříčky nerovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P . Nechť A_1 je druhý průsečík kružnice opsané $\triangle BCD$ s přímkou AP , body B_1 , C_1 , D_1 definujeme obdobně. Dokažte, že $A_1B_1C_1D_1$ je také lichoběžník. (Turnaj měst 2008)

Příklad 15. Osy úhlů u vrcholů A , B protnou protější strany trojúhelníku ABC v bodech D , E a samy sebe v I . Přímka DE protne kružnici opsanou v M a N . Dokažte, že přísiště I_A a I_B leží na kružnici MIN . (ARO 2006)

Příklad 16. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme G těžiště. Bod P na polopřímce AG splňuje $|\angle CPA| = |\angle CAB|$, bod Q na polopřímce BG splňuje $|\angle CQB| = |\angle ABC|$. Dokažte, že se kružnice AQG a BPG protínají na AB . (Kanada 2013)

Návody

1. Uvažujte mocnost z bodu P .
2. Použijte pravoúhlé trojúhelníky.
3. Uvažujte B , C jako nulové kružnice.
4. Přímka DE prochází středem úsečky AB , použijte úsekové úhly.
5. Dokreslete kružnici opsanou AXU .
6. Hledaný průsečík bude potenčním středem.
7. Bod P je průsečík výšky z vrcholu A a Thaletovy kružnice nad BC .
8. Ukažte, že trojúhelníky MKL a AQP jsou si podobné.
9. Dokažte, že na kružnici leží vždy dvě dvojice bodů. Mohlo by se jednat o různé kružnice?
10. Přímka p je chordála k a nějakého bodu.
11. Protněte kružnice podruhé.
12. Dokažte, že MQ je tečnou ke kružnici opsané BDQ .
13. Uvažujte I jako kružnici s nulovým poloměrem.
14. Kombinujte čtyři rovnosti získané z mocností.
15. Dokažte, že DE je chordála dvou kružnic.
16. Úhlové podmínky převedte na tečnosti a tipněte správný bod na AB .

Literatura a zdroje

Přednáška je převzata od *Hedviky Ranošové*, která čerpala z příspěvku *Tondy Le* a mého příspěvku a které tímto velice děkuji.

[1] Hedvika Ranošová : *Mocnost bodu ke kružnici*, Sklené, 2019.