Mocnost bodu ke kružnici

Alča Skálová

Úvod

Na přednášce si povíme, co je to mocnost bodu ke kružnici, jak vypadají chordály a potenční střed. A potom si na to vyřešíme pár (či spíš víc) příkladů. Nečekejte nic extra drsného, nýbrž spíš šikovnou věc z geometrie, kterou stojí za to znát. A to nejen proto, že některé příklady se s ní řeší jedna báseň (-:

Trocha vět a definic

Věta 1. *Mějme kružnici $k(S, r)$ a bod M, kterým prochází přímka p, jež protne kružnici k v bodech A a B. Potom platí $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě p a je rovno $||MS|^2 - r^2|$. V případě, že body A, B splynou do bodu T (tedy p je tečnou k), stále platí $|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$.*

Definice 2. (Mocnost) *Mocnost bodu M ke kružnici $k(S, r)$ je číslo $|MS|^2 - r^2$.*

Věta 3. *Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím $k(K, r)$ a $l(L, s)$, je přímka ch kolmá na přímku KL, jejíž patou je bod P, pro který platí $|KP| = \frac{|KL|^2 + r^2 - s^2}{2 \cdot |KL|}$.*

Definice 4. (Chordála) *Množina všech bodů, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost, se nazývá chordála dvou kružnic.*

Definice 5. (Potenční střed) *Bod, který má stejnou mocnost ke třem zadaným kružnicím, se nazývá potenční střed kružnic.*

Příklady

Příklad 6. Je dána kružnice k se středem S, mimo ni bod A. Na kružnici k je pohyblivý průměr XY. Trojúhelníku AXY je opsána kružnice se středem O. Urči množinu všech bodů O.

Příklad 7. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici k. Nechť D, resp. E je střed strany AB, resp. AC. Polopřímka DE protíná k v bodě P. Dokaž: $|DE|^2 = |DP|.|PE|$.

Příklad 8. (Apolloniova úloha – BBp) Je dána přímka t a body A a B (ve stejné polorovině), které na ní neleží. Sestroj kružnici k procházející body A a B tak, aby t byla její tečna.

Příklad 9. (Apolloniova úloha – BBk) Jsou dány body A, B a kružnice f. Sestroj kružnici k, jež prochází body A, B a dotýká se kružnice f.

Příklad 10. Na úsečce AB je bod M. Ve stejné polorovině od AB jsou čtverce $ACDM$ a $MEFB$, kterým jsou opsány kružnice, jež se protnou v bodech M a N. Dokaž, že přímka MN prochází jedním bodem, bez ohledu na polohu bodu M.

Příklad 11. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokaž, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP.

Příklad 12. Je dána rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde p a q jsou reálná čísla. Uvažujme všechny paraboly určené touto rovnicí takové, že protínají osy x a y ve třech různých bodech. Tyto body určují kružnici. Dokaž, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem, bez ohledu na hodnotu p a q.

Příklad 13. Trojúhelník ABC. Na straně AB je pohyblivý bod M a na straně AC je pohyblivý bod N. Kružnici nad průměrem $|BN|$ nazvěme k_1 a kružnici nad průměrem $|CM|$ budiž zvána k_2. Kružnice k_1 a k_2 se protnou v bodech P a Q. Dokaž, že přímka PQ prochází pevným bodem bez ohledu na polohu bodů M a N.

Příklad 14. (IMO 2008) V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany BC protíná přímku BC v bodech A_1 a A_2. Podobně kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany CA protíná přímku CA v bodech B_1 a B_2 a kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany AB protíná přímku AB v bodech C_1 a C_2. Ukaž, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.

Příklad 15. Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokaž, že všechny takové kružnice m procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky.

Příklad 16. (ČSP střetnutí) Je dán trojúhelník ABC, ve kterém $\beta > 45°$ (při obvyklém značení). Nechť D, E, F jsou po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C a nechť K je takový bod úsečky AF, že platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Dokaž, že platí rovnost $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

Závěrem bych mohla zmínit, kterak poznat, že při řešení příkladu nastal čas na použití mocnosti. Ale to až na přednášce `(-:`.

Zdroje

Příklady jsem nacházela všude možně, ale hlavními zdroji byli: Mathlinks na adrese `http://www.mathlinks.ro/Forum/`, archiv matematické olympiády – `http://www.math.muni.cz/řvmo/` a Pepa Tkadlec.

Všem budiž vysloven dík.