Mocnost a chordály

Pepa Tkadlec

Úvod

Za mocností bodu ke kružnici se skrývá elementární tvrzení, které však až překvapivě zjednodušuje argumenty a zprůhledňuje řešení mnohých úloh. Příklady řešitelné pomocí mocnosti jsou také v poslední době velmi populární na všech úrovních matematické olympiády (včetně té mezinárodní). Mocnost je tedy nástroj nad jiné užitečný, a proto neváhejme a pusťme se do výkladu.

Definice a základní vlastnosti

Definice. *Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r.* Mocností *bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M,k) = |MO|^2 - r^2$.*

Nechť M je bod a $k(O;r)$ kružnice.

(i) Číslo $p(M,k)$ je nulové právě tehdy, když bod M leží na kružnici k. Číslo $p(M,k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když M leží vně/uvnitř kružnice k.

(ii) Buď N další bod. Je-li $p(M,k) = p(N,k)$, pak $|MO| = |NO|$.

(iii) Pokud M leží vně k, označme T ten bod kružnice k, pro který je přímka MT ke kružnici k tečnou. Pak platí $p(M,k) = |MT|^2$.

(iv) (zásadní!) Nechť přímka p vedená bodem M protne k v bodech A, B. Pak $MA \cdot MB = p(M,k)$, kde úsečky MA, MB nahlížíme jako orientované.

Tvrzení. *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $Q = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$.*

Definice. *Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X,k) = p(X,l)$ nazýváme* chordálou *kružnic k, l.*

Tvrzení. *Chordálou dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.*

Poznámka. Obecněji: Přímka kolmá na spojnici středů kružnic k, l je množina těch bodů X, pro něž je rozdíl $p(X,k) - p(X,l)$ roven dané konstantě.

Definice. *Bodu, který má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím, říkáme* potenční střed.

Poznámka. Mocnost se *neobyčejně skvěle* kombinuje s úsekovými úhly a velmi dobře s Cèvovou a Menelaovou větou nebo s kruhovou inverzí.

Běžné konfigurace

Následující tři situace se v úlohách vyskytují tak často, že si zaslouží oproti všem ostatním zvýraznit. Buďte ve střehu a vždy, když na podobné rozestavení bodů narazíte, vzpomeňte si na mocnost.

Příklad. Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B. Buď T libovolný bod na k. Pak přímka MT je tečnou k právě tehdy, když $|\sphericalangle MAT| = |\sphericalangle MTB|$.

Příklad. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P. Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad. Kružnice k, l se protínají v bodech X, Y. Bodem M vedeme přímky p resp. q, které protnou kružnice k resp. l v bodech A, B resp. C, D. Pak body A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když $M \in XY$.

Dost už bylo úvodu, vrhněme se na příklady. Jsou řazeny zhruba dle obtížnosti, ale tato je vždy relativní, tak se neboj řešit příklady i na přeskáčku.

Lehké příklady

Příklad 1. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A. Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U. Označme M střed úsečky TU. Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 2. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (PraSe 2005)

Příklad 3. Na stranách AB, AC ostroúhlého trojúhelníka ABC leží body K, L. Ukažte, že společná tětiva kružnic nad průměry CK, BL prochází ortocentrem H trojúhelníka ABC.

Příklad 4. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme bod D. Nyní sestrojme kružnici k_1, která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D. Dále též kružnici k_2, která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné.

Příklad 5. Na kružnici m jsou dány body K, L tak, že KL není průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l ležící uvnitř m, které se m dotýkají v bodech K, L a samy se protínají v bodech X, Y. Ukažte, že přímka XY prochází pevným bodem.

Příklad 6. Označme H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka ABC. Kružnice k_a se středem ve středu strany BC procházející bodem H protíná stranu BC v bodech A_1, A_2. Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici. (IMO 2008, P1)

Příklad 7. Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky. (MO 57–A–I–5)

Příklad 8. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v X, Y. Na přímce XY zvolíme bod P ($P \notin BC$). Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M, přímka BP kružnici nad BD v bodě N. Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem. (IMO 1995, P1)

Příklad 9. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice k. Tečna ke k vedená bodem C protne přímku AB v bodě P. Označme M střed CP. Přímka MB protne kružnici k podruhé v bodě Q. Přímka PQ protne k podruhé v bodě R. Dokažte, že trojúhelník ARC je rovnoramenný. (Alex Zhai)

Středně obtížné příklady

Příklad 10. Označme AD, BE, CF výšky trojúhelníka ABC. Přímky EF, FD, DE protnou přímky BC, CA, AB po řadě v bodech L, M, N. Ukažte, že body L, M, N leží v přímce. Bonus: Na co je tato přímka kolmá?

Příklad 11. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník vepsaný do kružnice se středem O. Nechť P je jeho průsečík úhlopříček, $Q = AD \cap BC$ a $R = AB \cap CD$. Označme S druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABP a CDP. Ukažte, že body R, P, S leží v přímce. Dále ukažte, že i body Q, S, O leží v přímce.

Příklad 12. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Body P, Q leží na stranách AC, AB. Označme K, L, M středy úseček BP, CQ, PQ. Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku KLM se dotýká přímky PQ. Dokažte, že $|OP| = |OQ|$. (IMO 2009, P2)

Příklad 13. Nechť ABC je trojúhelník. Kružnice procházející body B, C podruhé protíná strany AB, AC v bodech C', B'. Ukažte, že přímky BB', CC', HH' procházejí jedním bodem, kde H, H' jsou ortocentra trojúhelníků ABC, $AB'C'$. (ISL 1995, G7)

Příklad 14. Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A a označme M střed strany BC. Na AM zvolme bod D a zkonstruujme kružnice k, l procházející bodem D, které se dotýkají přímky BC po řadě v bodech B, C. Přímka AB resp. AC protne kružnici k resp. l podruhé v bodě P resp. Q. Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici l vedená bodem Q se protínají na AM. (Vietnam TST 2010)

Příklad 15. Tečny ke kružnici k se středem O v bodech A, B se protnou v bodě P. Na kratším oblouku AB zvolíme bod C (různý od středu). Označme $D = AC \cap PB$ a $E = BC \cap AP$. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACE, BCD a PCO leží v přímce. (ARO 2010)

Příklad 16. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech D, E, F. Bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku BCX se dotýká BC v D a stran CX, XB po řadě v Y, Z. Ukažte, že body E, F, Y, Z leží na kružnici.

Příklad 17. (Brianchon theorem) Předpokládejme, že šestiúhelníku $ABCDEF$ se dá vepsat kružnice. Ukažte, že přímky AD, BE, CF procházejí jedním bodem.

Triky

Mocnost bodu ke kružnici použitá vtipně a ve správný okamžik často velmi rychle vyřeší jinak nepříjemnou úlohu. Někdy si vystačíme s mocností samotnou, jindy je potřeba ji vhodně zkombinovat například s Viètovými vztahy. Obzvláště fikaným trikem je pak chápání bodu jako kružnice s nulovým poloměrem.

Příklad 18. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k. (MO 56–A–I–5)

Příklad 19. Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2+px+q=0, p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

Příklad 20. Je dán trojúhelník ABC a I, O středy jeho vepsané a opsané kružnice. Označme A' průsečík přímky BC a kolmice na AI vedené bodem I. Body B', C' jsou definované podobně. Ukažte, že body A', B', C' leží v přímce, která je kolmá na OI.

Příklad 21. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E. Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC. Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$. (Alex Anderson)

Příklad 22. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T. Bod A probíhá kružnici l. Na kružnici k najdeme body B, C, aby AB, AC byly tečny kružnice k. Přímky BT, CT protnou kružnici l podruhé v bodech D, E. Najděte množinu průsečíků přímek DE a tečen ke kružnici l v bodě A. (KMS 2009/10, 13)

Příklad 23. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AC, BC v bodech E, D. Průsečík $AD \cap BE$ označme G. Zkonstruujeme body U, V, aby $ABUE$ a $ABDV$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že $|GU| = |GV|$. (ISL 2009, G3)

Literatura a zdroje

Čerpal jsem převážně z archivů mezinárodní matematické olympiády stejně jako z národních olympiád, korespondenčních seminářů (PraSe a KMS) a z příspěvku *Alči Skálové*, jíž tímto děkuji.

Hinty

Běžné konfigurace

Hint. Úsekový úhel.

Hint. Bod P má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Mocnost se dá měřit po tečnách.

Hint. Oboje je ekvivalentní $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

Lehké příklady

Hint 1. Měřte z bodu A. Vzpomeňte na Euklidovu větu o odvěsně (nebo jen odhalte podobné trojúhelníky).

Hint 2. Dokažte podobnost MDQ a MQB pomocí uu a pomocí mocnosti vyvoďte $|MT|^2 = |MQ|^2$.

Hint 3. Ukažte, že H má stejnou mocnost k oběma zadaným kružnicím. Použijte při tom, že BCB_0C_0 je tětivový (B_0, C_0 značí paty výšek).

Hint 4. Uvědomte si, že DE protne AB v jejím středu M. Pak ukažte, že $AMCE$ je tětivový.

Hint 5. Průsečík P tečen k m v bodech K a L má ke kružnicím k, l stejnou mocnost $|PK|^2 = |PL|^2$, tedy leží na jejich chordále.

Hint 6. Když je AB vodorovná, musí být spojnice druhého průsečíku $k_a \cap k_b$ a H svislá, takže C leží na chordále k_a, k_b. Pozorně dokončete.

Hint 7. Přímky AB protínají k podruhé v pevném bodě. Z něj měřte mocnost.

Hint 8. Stačí ukázat, že $ADNM$ je tětivový. To vyúhlete s využitím toho, že $BCNM$ je tětivový.

Hint 9. Dokreslete B', aby $BPB'C$ byl rovnoběžník. Pak $QPB'C$ je tětivový. Zbytek doúhlete.

Středně obtížné příklady

Hint 10. Body L, M, N mají stejnou mocnost ke kružnicím opsaným trojúhelníkům ABC a DEF. Bonus: Na přímku O, T, H.

Hint 11. Bod R je potenční střed tří kružnic, takže R, P, S máme. Vyúhlete tětivové čtyřúhleníky $BCSO$ a $AOSD$ a podobně odvoďte i Q, S, O.

Hint 12. Pomocí úsekových úhlů ukažte podobnost KLM a APQ. Následně ověřte, že body P, Q nají stejnou mocnost ke kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Hint 13. Ukažte, že body H, H' a $BB' \cap CC'$ mají všechny stejnou mocnost ke kružnicím nad průměry BB', CC'.

Hint 14. Těžnice je chordála k a l, takže $BCQP$ je tětivový (mocnost z A). Hledaný průsečík označte X a dokažte, že trojúhelník PXQ je rovnoramenný (u P, Q znáte úhly).

Hint 15. Spočtěte, že kružnice opsané BCD a $AOBP$ se dotýkají. Dokreslete průsečík tečen k $AOBP$ v A resp. B a ukažte, že je to potenční střed všech tří zadaných kružnic. Vyvoďte, že tyto mají i druhý společný průsečík různý od C.

Hint 16. Srovnáním Menelaovy a Cèvovy věty pro ABC a EF resp. XBC a YZ ukažte, že EF a YZ protínají BC v témže bodě. Z něj měřte mocnost.

Hint 17. Dokreslete tři kružnice tak, aby se každá dotýkala jedné dvojice přímek z nabídky AB a DE, BC a EF, CD a FA, a navíc aby přímky AD, BE, CF byly chordálami vždy dvou z těchto tří kružnic. Takové kružnice kupodivu lze sestrojit pro libovolný tečnový šestiúhelník $ABCDEF$.

Triky

Hint 18. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protíná přímku AO podruhé v pevném bodě (mocnost středu k).

Hint 19. Viètovy vztahy. Pozor na 2 případy.

Hint 20. Dokažte, že rozdíl mocností bodu A' k opsané a vepsané kružnici trojúhelníka ABC je r^2 (r je poloměr vepsané), čili konstanta. Může se hodit vědět, že střed oblouku BC je střed kružnice opsané trojúhelníku BIC.

Hint 21. Interpretujte přímky Y_1Y_2 resp. Z_1Z_2 jako chordály kružnice vepsané a bodů B resp. C.

Hint 22. Je to chordála (společná vnitřní tečna) k a l. Tečnu k l v A chápejte jako chordálu l a A, zbývá ukázat, že DE je chordála k a A, tj. že $|DA|^2 = |DT| \cdot |DB|$ (a obdobně pro E), což je podobnost nějakých dvou trojúhelníků. Přeneste vhodný úhel pomocí stejnolehlosti.

Hint 23. Dokreslete kružnici připsanou ABC vzhledem k A. Vhodně popřenášejte délky úseků z vrcholů k bodům dotyku. Vyjde, že přímka AD je chordála připsané a bodu V a BE je chordála připsané a bodu U. Tedy G leží na chordále U a V, což jsme přesně chtěli.