Miera a jej konštrukcia

Rasťo Olhava

Ľudstvo malo odjakživa potrebu premeriavať, či už išlo o počet prasiatok v chlieve alebo o rozlohu pozemku. Veľkosť alebo množstvo hralo vždy dôležitú úlohu. Často išlo o meranie veľkosti určitej množiny. Dlhé roky sme si vystačili s empiricky zistenými a odskúšanými formulkami, pričom bežný človek si s nimi vystačí aj doteraz. Neplatí to o matematikoch, ktorí s rozvojom ich vedného oboru narazili na množiny, ktorých veľkosť s ich vtedajším matematickým aparátom nevedeli určiť. A tak vznikla miera. Na mojej prednáške sa dozviete, čo to je a ako skonštruovať najzákladnejšiu z nich – Lebegueovu mieru. Uveďme si pojmy a vety, ktorými sa budeme zaoberať:

Definícia 1. *Nech X je množina. Systém $\mathcal{O}$ podmnožín X sa nazýva okruh, ak*

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$

(O2) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{O}$

(O3) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}$

Definícia 2. *Nech X je množina. Systém $\mathcal{O}$ podmnožín X sa nazýva σ-okruh, ak*

(σ-O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$

(σ-O2) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{O}$

(σ-O3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{O}$

Definícia 3. *Algebra je okruh, ktorý obsahuje celý priestor X. σ-algebra je σ-okruh obsahujúci celý priestor X, pričom ak $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X, dvojica $(X, \mathcal{S})$ sa nazýva merateľný priestor.*

Definícia 4. *Nech $(X, \mathcal{S})$ je merateľný priestor. Množinová funkcia $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ sa nazýva miera, ak splňuje*

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) (σ-additivita) ak $A_j \in \mathcal{S}$, $j \in \mathbb{N}$ sú po dvoch disjunktné, potom

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$$

Definícia 5. *Vonkajšou mierou na množine X rozumieme množinovú funkciu $\gamma : 2^X \to [0, \infty]$ ak splňuje*

(VM1) $\gamma(\emptyset) = 0$

(VM2) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$

(VM3) (σ-subadditivita) $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$

Definícia 6. *Nech γ je vonkajšia miera na X. Množinu $M \subset X$ nazveme γ-merateľnou, ak pre každú "testovaciu" množinu $T \subset X$ platí*

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

Systém všetkých γ-merateľných množín značíme $\mathcal{M}(\gamma)$ a množinovú funkciu $\gamma \lfloor \mathcal{M}(\gamma)$ značíme γ^o

Veta 7. (Vlastnosti miery) *Nech $A_j \in S$*
(a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$
(b) ak $A_j \in S, j \in \mathbb{N}, A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, potom

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \lim_j \mu(A_j)$$

(c) ak $A_j \in S, j \in \mathbb{N}, A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, a ak $\mu(A_1) < \infty$, potom

$$\mu(\bigcap_j A_j) = \lim_j \mu(A_j)$$

Veta 8. (Carathéodory) *Nech γ je vonkajšia miera na X. Potom systém $\mathcal{M}(\gamma)$ tvorí σ-algebru a γ^o je miera.*

No a zvyšok sa dozviete na prednáške ...