Metrické prostory a kompaktnost

David Hruška

Abstrakt. Příspěvek shrnuje vybrané základní poznatky o metrických prostorech. Jeho závěrečná část je věnována kompaktnosti a jejím aplikacím.

V reálném světě, natož pak v tom matematickém, potřebujeme velmi často „měřit vzdálenost". To znamená pro nějakou hromadu věcí vědět, jak jsou od sebe daleko. Každého asi bez přemýšlení napadne klasická (*eukleidovská*) vzdálenost po přímce, která je např. v rovině daná vzorcem z Pythagorovy věty, tedy

$$d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Je ale mnoho jiných přirozených způsobů, jak měřit vzdálenost. Například při cestování nás daleko víc než vzdálenost „vzdušnou čarou" zajímá čas, který cestováním strávíme. Tedy efektivní vzdálenost $d_t(A,B)$ míst A a B je pro nás nejkratší čas, za který jsme schopni se pomocí nějaké kombinace dopravních prostředků dostat z místa A do místa B. Jistě sami vymyslíte mnoho dalších rozumných způsobů měření vzdálenosti. Abychom se mohli pustit do pořádné matematické teorie o všech takových způsobech, zadefinujeme si zobecněnou vzdálenost[1] neboli *metriku* . Budeme požadovat následující:

Definice. *Metrikou* na množině X rozumíme funkci $\varrho : X \times X \to \langle 0,\infty)$ splňující

(i) $\varrho(x,y)=0$, právě když $x=y$,
(ii) $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$ pro všechna $x,y\in X$,
(iii) $\varrho(x,y)\le\varrho(x,z)+\varrho(z,y)$ pro všechna $x,y,z\in X$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici (X,ϱ) pak nazveme *metrickým prostorem.*

Metrický prostor je tedy množina (tzv. *nosná*), pro kterou jsme schopni říct, jak daleko od sebe jsou její libovolné dva body.

Příklady.

(i) Asi nejběžnější metrikou na[2] $\mathbb{R}^n$ je již zmíněná *eukleidovská*, která odpovídá

[1] Samotné slovo „vzdálenost" bývá zpravidla vyhrazeno té eukleidovské.

[2] Nevěříte-li na více než trojrozměrné prostory, můžete u nich alespoň na této přednášce klidně zůstat.

vzdálenosti, na kterou jsme zvyklí:

$$\varrho_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Jinou možnou metrikou je *manhattanská* či *newyorská*:

$$\varrho_1(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|,$$

nebo *maximová*:

$$\varrho_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\ldots,|x_n-y_n|\}.$$

Indexy 1, 2 a ∞ nejsou jediné použitelné a i funkce

$$\varrho_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p+\cdots+|x_n-y_n|^p}$$

je metrikou na $\mathbb{R}^n$ pro $p \in \langle 1,\infty)$.

(ii) Na množině všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$, kterou značíme $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$, máme také maximovou[3] metriku:

$$\varrho_{\max}(f,g) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)-g(x)|.$$

(iii) Na úplně každé neprázdné množině můžeme definovat *diskrétní metriku* předpisem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x=y, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(iv) Buď G konečný souvislý graf, V množina jeho vrcholů. Pro $u,v \in V$ můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako délku nejkratší cesty z u do v v G.

(v) Označme ještě E množinu hran grafu G. Každou hranu $e \in E$ „ohodnotíme“ nějakým kladným reálným číslem $f(e)$. Je-li C cesta v G používající hrany $e_1,e_2,\ldots,e_n$, pak její *ohodnocenou délkou* nazveme číslo $f(e_1)+f(e_2)+\cdots+f(e_n)$. Pro $u,v \in V$ pak můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako nejmenší možnou ohodnocenou délku cesty z u do v.

Cvičení. Ověřte, že uvedené příklady jsou skutečně metrikami.

Cvičení. Na políčkách šachovnice 8×8 uvažme pro každá dvě pole nejmenší počet tahů, které musíme udělat králem, resp. dámou/věží/koněm/střelcem, abychom figuru přemístili z jednoho pole do druhého. Ve kterých případech jde o metriku? Jak tato metrika souvisí s metrikami uvedenými výše?

Cvičení. Uveďte příklad nějaké metriky na sféře nebo jiném zakřiveném povrchu.

[3] Maximum existuje, viz kapitolu o kompaktnosti.

Koule v metrickém prostoru

Běžná definice koule dává smysl v každém metrickém prostoru, ale už vůbec nemusí být tak hezky kulatá, jak jsme zvyklí.

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$ a $r \in (0, \infty)$. Množinu

$$B(x, r) = B_\varrho(x, r) = \{y \in X : \varrho(x, y) < r\}$$

nazveme *(otevřenou) koulí* se středem v x a poloměrem r.

Cvičení. Jak vypadají jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$ se středem v nule při metrikách ϱ_1, ϱ_2, a ϱ_∞? Ukažte souvislost s tvrzením $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1(x, y) \geq \varrho_2(x, y) \geq \varrho_\infty(x, y)$.

Cvičení. (Podivné, ale poučné) Najděte metrický prostor a v něm kouli, která vypadá jako trojúhelník, nebo jako množina racionálních čísel, nebo třeba jako slon.

Definice. Je-li (X, ϱ) metrický prostor, pak množině $Y \subset X$ s metrikou ϱ říkáme *podprostor* metrického prostoru (X, ϱ) a značíme (Y, ϱ).

Topologie v metrickém prostoru

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subseteq X$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $x \in G$ existuje $r \in (0, \infty)$ takové, že $B_\varrho(x, r) \subseteq G$. Řekneme, že množina $F \subseteq X$ je *uzavřená*, pokud je $X \setminus F$ otevřená.[4]

Příklad. Jak lze vytušit z terminologie, v $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou jsou otevřené intervaly otevřené, analogicky uzavřené intervaly jsou uzavřené. Nejde ovšem o všechny otevřené, resp. uzavřené množiny!

Cvičení. V $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou najděte množinu, která není otevřená, ani uzavřená.

Příklad. V metrických prostorech $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ jsou otevřené přesně ty samé množiny – to platí díky nerovnosti

$$\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq \varrho_1(x, y) \leq n \cdot \varrho_\infty(x, y).$$

Cvičení. Popište všechny otevřené množiny v prostoru s diskrétní metrikou.

Věta. (Vlastnosti otevřených množin)

(O1) *Celý prostor a prázdná množina jsou otevřené množiny.*

[4] Značení otevřených a uzavřených množin vychází z německého slova *geöffnet* a francouzského *fermé*.

(O2) *Sjednocení (libovolně velkého) systému otevřených množin je otevřená množina.*
(O3) *Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.*[5]

Cvičení. Ukažte, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin již nemusí být otevřenou množinou.

Cvičení. Zformulujte analogická tvrzení pro uzavřené množiny.

Konvergence a spojitost v metrických prostorech

Úmluva. Ne vždy budeme značit metrický prostor formálně jako dvojici (X, ϱ). Pokud je na X nějaká velmi standardní metrika (zpravidla eukleidovská na $X = \mathbb{R}^n$), budeme psát jen X.

Teď už se dostáváme k jádru toho, čemu se říká *matematická analýza*. Nejprve se smíříme s faktem tak fundamentálním, že přímo souvisí s tím, co jsou vlastně reálná čísla přesně zač.

Definice. *Supremem (resp. infimem)* shora (resp. zdola) omezené množiny $M \subset \mathbb{R}$ nazveme nejmenší (resp. největší) takové číslo $a \in \mathbb{R}$, že kdykoliv $b \in M$, potom už $b \leq a$ (resp. $b \geq a$). Značíme $a = \sup M$ (resp. $a = \inf M$).

Tvrzení. *Každá shora (zdola) omezená podmnožina reálných čísel má supremum (resp. infimum).*

Pomocí infima můžeme například definovat vzdálenost dvou množin (speciálně také bodu od množiny).

Definice. Pro (X, ϱ) metrický prostor a $A, B \subset X$ definujeme

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \varrho(a, b).$$

Většinou se následující pojmy definují nejprve pro reálná čísla a reálné funkce a až zpětně se zobecňují. My ale konkrétní strukturu reálných čísel nepotřebujeme (s výjimkou axiomů metriky samotné) a definujeme vše rovnou pro obecné metrické prostory.

Definice. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z metrického prostoru (X, ϱ) má *limitu* x (resp. *konverguje* k x), pokud platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Má-li posloupnost limitu, nazývá se *konvergentní.*

Tvrzení. *Množina F v metrickém prostoru (X, ϱ) je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z F je $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$ (neformálně, z uzavřené množiny nelze „vykonvergovat ven“). Ekvivalentně, množina F je uzavřená, právě když pro každé $x \in X$ platí implikace $(\varrho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F)$.*

[5] Odtud snadno plyne, že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Cvičení. Dokažte, že posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Cvičení. Dokažte, že v $\mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Jako příklad silně netriviálního použití pojmu konvergence uvedeme následující větu, která tvrdí, že spojitou reálnou funkci na uzavřeném intervalu umíme libovolně přesně aproximovat polynomem.

Věta. (Weierstrassova) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ existuje posloupnost polynomů $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f = \lim_{n\to\infty} p_n$, kde limitu uvažujeme v maximové metrice.*

Pokud už jste setkali s pojmem „spojitosti", ale rozčilovalo vás, že vám nikdo nebyl schopen pořádně říct, co to je, tak jste se konečně dočkali.

Definice. Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *spojitá v bodě* $x \in X$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in X$ splňující $\varrho(x,y) < \delta$ platí $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Je-li f spojitá v každém bodě X, pak řekneme, že je *spojitá*.

Řečeno slovy, funkce je spojitá v bodě x, pokud body blízko x zobrazí na body blízké $f(x)$, kde to druhé „blízko" je libovolně přesné. Ještě jinak, spojitá funkce „netrhá" prostor, na kterém je definovaná. Například pro reálnou funkci se intuitivně říká, že je spojitá, pokud její graf lze nakreslit bez zvedání tužky z papíru.

Cvičení. Dokažte, že při značení jako výše je f spojitá v $x \in X$, právě když pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z X platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Řečeno méně formálně, funkce je spojitá, pokud „zachovává limity posloupností".

Cvičení. Dokažte, že na (X,ϱ) jsou funkce

(i) $id\colon X \to X$, $id(x) = x$,
(ii) $f_a\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \varrho(x,a)$ pro nějaké $a \in X$

spojité.

Cvičení. Uveďte příklady reálné funkce (tedy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), která je

(i) spojitá,
(ii) nespojitá,
(iii) nespojitá všude až na jeden bod.

Tvrzení. *Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Funkce $f\colon X \to Y$ je spojitá právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subseteq Y$ je vzor této množiny v f (tj. množina $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$) otevřená množina v X.*

Poznámka. Uvedená věta naznačuje, že pojem spojitosti funkcí není nijak hluboce závislý na konkrétních metrikách, které na množinách máme, rozhodující je pouze informace, které množiny jsou v daných prostorech otevřené. Tato skutečnost je motivací pro pojem struktury ještě obecnější, než je metrický prostor, tzv. *topologického prostoru.*

Kompaktnost

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá *kompaktní*, pokud z každého jeho pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí.

Tato abstraktní podmínka zatím asi nezní příliš intuitivně, ale její užitečnost spočívá v tom, že je ekvivalentní překvapivě mnoha „jiným" vlastnostem metrického prostoru.

Věta. (O kompaktnosti) *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *(X, ϱ) je kompaktní.*
(ii) *Každý soubor uzavřených množin, z nichž každých konečně mnoho má neprázdný průnik, má (celý) neprázdný průnik.*
(iii) *Každá nekonečná množina $M \subset X$ má hromadný bod v X (bod $x \in X$ se nazývá hromadným bodem množiny M, jestliže $\varrho(x, M \setminus \{x\}) = 0$).*
(iv) *Z každé posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bodů z X lze vybrat konvergentní podposloupnost.*
(v) *Každá spojitá funkce $f\colon (X, \varrho) \to \mathbb{R}$ nabývá svého maxima a minima.*

Poznámka. Kompaktnost jsme definovali pro celý prostor, ale je snadné ji dodefinovat pro $M \subset X$. Řekneme, že $M \subset X$ je *kompaktní*, pokud podprostor (M, ϱ) je kompaktní.

V $\mathbb{R}^n$ je situace ještě jednodušší.

Věta. (Heine-Borel-Lebesgue) *Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená (tzn. vejde se do nějaké koule).*

Příklad. Následující množiny jsou kompaktní:

(i) $\langle a, b\rangle$ v $\mathbb{R}$,
(ii) čtverec v $\mathbb{R}^2$,
(iii) kružnice v $\mathbb{R}^2$,
(iv) libovolná konečná množina v (X, ϱ).

Příklad. Následující množiny **ne**jsou kompaktní:

(i) $\mathbb{R}$ (v $\mathbb{R}$ samotném),
(ii) (a, b) v $\mathbb{R}$,
(iii) $\langle 0, \infty)$ v $\mathbb{R}$,
(iv) $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$,
(v) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ v $\mathbb{R}^2$.

Další vlastnosti a aplikace

Úloha 1. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní, tzn. je-li (X, ϱ) kompaktní a $f\colon (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ je spojitá, pak $f(X)$ je kompaktní v (Y, σ).

Úloha 2. Dokažte, že ze všech trojúhelníků s vrcholy na dané kružnici mají největší obsah ty rovnostranné.

Úloha 3. Najděte v $\mathbb{R}^2$ dvě disjunktní uzavřené množiny s nulovou vzdáleností. Může být alespoň jedna z nich kompaktní?

Úloha 4. Aktivista se vydal do lesa hlídat stromy. Stoupl si mazaně na takové místo, že viděl strom v každém směru kolem sebe. Mohou vždy špatní a zkažení dřevorubci pokácet všechny stromy až na konečný počet tak, aby aktivista stále viděl v každém směru strom? Předpokládejte, že aktivista je bod v rovině a stromy jsou libovolně rozmístěné a libovolně velké kruhy.

Úloha 5. Uvažme potrubí (orientovaný graf ohodnocený kapacitami trubek) s jedním vstupem (většinou se mu říká *zdroj*) a jedním výstupem (*stokem*). Dokažte, že existuje maximální tok. (*Tok* je ohodnocení hran skutečnými průtoky, pro které má každý vrchol kromě zdroje a stoku součet nula.)

Úloha 6. Hodíme-li plán Prahy v Praze na zem, bude právě jeden jeho bod ležet přesně na svém obrazu. Formálněji, je-li (K, d) kompaktní prostor a $f\colon K \to K$ spojitá funkce splňující pro každé $x, y \in K,\ x \neq y$ nerovnost $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, pak existuje právě jedno $x \in K$ takové, že $f(x) = x$. Platí to i pro neostrou nerovnost?

Úloha 7. Kuchař spojitě zamíchal kompaktní guláš. Dokažte, že nějaký kus guláše skončil přesně tam, kde byl před zamícháním. Formálněji, nechť $f\colon K \to K$ je spojitá a K kompaktní. Dokažte, že pak existuje $\emptyset \neq A \subset K$, že $f(A) = A$.

Úloha 8. (Těžká čokoládová) Dokažte, že je-li (K, d) kompaktní prostor a $f\colon K \to K$ spojitá funkce splňující pro každé $x, y \in K$ nerovnost $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$, pak f je na, neboli $f(K) = K$.

Návody

1. Použijte definice.

2. Kružnice je kompaktní.

3. Hyperbola s asymptotou; nemůže.

4. Kružnice je kompaktní.

5. Součin intervalů je kompaktní a velikost toku v závislosti na průtocích jednotlivými trubkami je spojitá.

6. Funkce $d(x, f(x))$ je spojitá.

7. Funguje $A \cap f(A) \cap f(f(A)) \cap \ldots$

8. Využijte výsledek úlohy s kuchařem.

Literatura a zdroje

[1] Alexander „Olin“ Slávik: *Prostory metrické a jiné*, Blansko-Obůrka, 2011.
[2] Martin Tancer: *Metrické prostory*, Loučná, 2003.