Metrické prostory

Tomáš Bárta

Definice : Buď P libovolná množina a $\varrho : P^2 \to [0; +\infty)$ splňující axiomy

(1) $\varrho(x, y) = 0$, právě když $x = y$
(2) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
(3) $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

Pak dvojici (P, ϱ) nazveme *metrickým prostorem.*

Definice : Nechť $x \in P$, $\varepsilon > 0$. Pak množinu $K_{x,\varepsilon} = \{y \in P | \varrho(x, y) < \varepsilon\}$ nazveme *otevřenou koulí.*

Příklady :

(i) P *libovolná*, $\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x = y \\ 1 \text{ pro } x \neq y \end{cases}$
(ii) $(\mathbb{R}, \varrho_1)$, *kde* $\varrho_1(x, y) = |x - y|$
(iii) $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$, *kde pro* $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n], y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *je*

$$\varrho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Otevřené a uzavřené množiny

Definice : Množina $G \subseteq P$ se nazývá *otevřená*, jestliže $\forall x \in G\ \exists \varepsilon > 0 : K_{x,\varepsilon} \subseteq G$. Systém všech otevřených množin značíme $\mathbb{G}$.

Tvrzení : Otevřená koule je otevřená množina.

Vlastnosti otevřených množin :

(i) $\emptyset \in \mathbb{G}$, $P \in \mathbb{G}$
(ii) $\mathbb{G}' \subseteq \mathbb{G}$, pak $\bigcup\limits_{G \in \mathbb{G}} G \in \mathbb{G}$
(iii) $\mathbb{G}' \subseteq \mathbb{G}$ je konečný podsystém, pak $\bigcap\limits_{G \in \mathbb{G}} G \in \mathbb{G}$

Definice : Množina $F \subseteq P$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $P \setminus F$ je otevřená. Systém všech uzavřených množin značíme $\mathbb{F}$.

Definice : $M \subseteq P$, pak

$$\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq F \in \mathbb{F}} F$$

se nazývá *uzávěr množiny* M.

Vlastnosti uzávěru množiny :

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$
(ii) $M \subseteq \overline{M}$
(iii) $M_1 \subseteq M_2 \implies \overline{M}_1 \subseteq \overline{M}_2$ *(monotonie)*
(iv) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ *(aditivita)*
(v) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ *(idempotence)*

Definice : $M \subseteq P$, pak

$$\mathrm{Int}(M) := \bigcup_{M \supset G \in \mathbb{G}} F$$

se nazývá *vnitřek množiny* M.

Definice : Množina O se nazývá *okolím* bodu x, jestliže $x \in \mathrm{Int}(O)$. Systém všech okolí bodu x označme $\mathbb{O}(x)$.

Definice : Nechť $x \in P$, $\emptyset \neq M \subseteq P$. Pak

$$\varrho(x, M) := \inf_{y \in M} \varrho(x, y).$$

Věta : Nechť $M \subseteq P$, $x \in P$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) $x \in \overline{M}$
(ii) každé okolí x protne množinu M
(iii) $\varrho(x, M) = 0$

Definice : Množinu $H(M) = \overline{M} \cap \overline{(P \setminus M)}$ nazveme *hranicí* množiny M.

Tvrzení : $H(M) = \overline{M} \setminus \mathrm{Int}(M)$

Konvergence

Definice : Nechť $x \in P, (x_n) \subset P$. Řekneme, že posloupnost (x_n) *konverguje* k bodu x (značíme $\lim x_n = x, x_n \to x$), jestliže platí

$$\forall O \in \mathbb{O}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in O.$$

Věta : $\lim x_n = x \iff \lim \varrho(x_n, x)$

Definice : Bod $x \in P$ se nazývá *hromadným bodem* množiny M, jestliže $x \in \overline{M \setminus \{x\}}$.

Tvrzení : Bod x je hromadným bodem množiny M, právě když každé okolí bodu x protne M v nekonečně mnoha elementech.

Tvrzení : $x \in \overline{M} \iff \exists (x_n) \subset M : \lim x_n = x$

Spojitá zobrazení

Definice : Řekneme, že zobrazení $f : (P, \varrho) \to (P', \varrho')$ je *spojité* v bodě $x \in P$, jestliže $\forall O \in \mathbb{O}(f(x)) : f^{-1}(O) \in \mathbb{O}(x)$.

Tvrzení : Nechť $f : (P, \varrho) \to (P', \varrho')$ je zobrazení a $x \in P$. Pak následující je ekvivalentní.

(i) f je spojité v bodě x
(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in P :\ \varrho(x, y) < \delta \implies \varrho'(f(x), f(y)) < \varepsilon$
(iii) $\lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$
(iv) $\forall M \subset P :\ x \in \overline{M} \implies f(x) \in \overline{f(M)}$

Definice : Řekneme, že f je *spojité*, jestliže je spojité v každém bodě prostoru P.

Tvrzení : Každé zobrazení z diskrétního metrického prostoru je spojité.

Definice : Bijekci $f : (P, \varrho) \to (P', \varrho')$ nazveme *homeomorfismem*, jestliže f i f^{-1} jsou spojitá.

Definice : Bijekci $f : (P, \varrho) \to (P', \varrho')$ nazveme *izometrií*, jestliže pro všechna $x, y \in P$ platí

$$\varrho'(f(x), f(y)) = \varrho(x, y).$$

Definice : Metrické prostory (P, ϱ), (P', ϱ') jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje homeomorfismus $f : (P, \varrho) \to (P', \varrho')$. Metriky ϱ, ϱ' na množině P se nazývají *ekvivalentní*, jestliže existuje homeomorfismus $f : (P, \varrho) \to (P, \varrho')$.

Tvrzení : Nechť

$$\varsigma(x, y) = \min(1, \varrho(x, y)) \qquad \tau(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}$$

Pak metriky ϱ, ς, τ jsou ekvivalentní.