Metrické prostory

Martin Tancer

V matematice i v reálném životě se často setkáváme se situací, kdy nemůžeme měřit vzdálenost tak, jak jsme běžně zvyklí v rovině (v prostoru). Příkladem může být vzdálenost mezi dvěma městy po železniční trati, vzdálenost dvou bodů na povrchu koule nebo vzdálenost dvou míst ve městě, kde je pravoúhlý systém ulic. Pojem vzdálenosti jde v těchto (a mnoha jiných) případech zobecnit na pojem metriky, přičemž chceme pro metriku zachovat některé základní vlastnosti vzdálenosti v rovině (prostoru).

Definice. *Nechť je dána množina X. Metrikou na X rozumějme funkci $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ splňující*
(i) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) \geq 0$ a $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *(nezápornost)*
(ii) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, *(symetrie)*
(iii) $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$. *(trojúhelníková nerovnost)*

Definice. *Dvojice (X, ϱ), kde ϱ je metrika na X, se nazývá metrický prostor.*

Poznámka. (Příklady metrických prostorů)
• $(\mathbb{R}, |x - y|)$ je metrický prostor.
• $\left(\mathbb{R}^2, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right)$ je metrický prostor.
• $\left(\mathbb{R}^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right)$ je metrický prostor.
• $\left(\mathbb{R}^2, \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right)\right)$ je metrický prostor.
• (M, δ), kde M je libovolná množina a $\delta(x, y) = 0$ pro $x = y$ a $\delta(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, je metrický prostor.

Definice. *Supremem (infimem) shora (zdola) omezené množiny $M \subset \mathbb{R}$ nazveme nejmenší (největší) takové číslo $a \in \mathbb{R}$, že kdykoliv $b \in M$, potom už $b \leq a$ ($b \geq a$), značíme* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Fakt. Každá shora (zdola) omezená podmnožina reálných čísel má supremum (infimum).

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Mějme $x \in X, M \subseteq X$. Vzdáleností bodu X od množiny M rozumějme výraz $\varrho(x, M) = \inf\{\varrho(x, y) | y \in M\}$.*

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Mějme $x \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Koulí o středu x a poloměru r rozumějme množinu*

$$B_\varrho(x, r) = \{y \in X | \varrho(x, y) < r\}.$$

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor.*
(i) $M \subseteq X$ se nazývá uzavřená $\Leftrightarrow \forall x \in X : \varrho(x, M) = 0 \Rightarrow x \in M$.
(ii) $M \subseteq X$ se nazývá otevřená $\Leftrightarrow X \setminus M$ je uzavřená.

Tvrzení. (Základní vlastnosti uzavřených a otevřených množin) Nechť (X, ϱ) je metrický prostor.
(a) $\emptyset, X$ jsou uzavřené.
(b) $\emptyset, X$ jsou otevřené.
(c) Jsou-li $F_\alpha \subseteq X$ uzavřené, potom $\bigcap F_\alpha$ je uzavřená.
(d) Jsou-li $F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq X$ uzavřené, potom $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ je uzavřená.
(e) Jsou-li $G_\alpha \subseteq X$ otevřené, potom $\bigcup G_\alpha$ je otevřená.
(f) Jsou-li $G_1, G_2, \ldots, G_n \subseteq X$ otevřené, potom $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ je otevřená.

Tvrzení. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor.
(a) $G \subseteq X$ je otevřená $\Leftrightarrow \forall x \in G\ \exists r > 0 : B_\varrho(x, r) \subseteq G$.
(b) Je-li $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, potom je $B_\varrho(x, r)$ otevřená.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Mějme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost bodů v X. Řekneme, že $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k bodu $x \in X$, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0) : \varrho(x, x_n) < \varepsilon.$$

Bod x se pak nazývá limitou posloupnosti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tvrzení. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $F \subseteq X$. F je uzavřená, právě když každá konvergentní posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ má limitu v F.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subseteq X$.*
(i) Uzávěrem M rozumíme množinu $\overline{M} = \{x \in X | \varrho(x, M) = 0\}$.
(ii) Vnitřkem M rozumíme množinu $\mathrm{Int}(M) = X \setminus \overline{(X \setminus M)}$.

Tvrzení. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subseteq X$.
(a) $\overline{M}$ je uzavřená.
(b) $\mathrm{Int}(M)$ je otevřená.
(c) $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.
(d) $\overline{M \cup N)} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
(e) $\overline{M} = \bigcap \{F \subseteq X | M \subseteq F,\ F \text{ uzavřená}\}$.

Definice. *Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ nazveme spojité, právě když*

$$(\forall x \in X)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in X) : \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma\,(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Tvrzení. Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:
(a) f je spojité.
(b) $\forall G \subseteq Y$ otevřenou v (Y, σ) je $f_{-1}[G]$ otevřená v (X, ϱ).
(c) $\forall F \subseteq Y$ uzavřenou v (Y, σ) je $f_{-1}[F]$ uzavřená v (X, ϱ).

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $Y \subseteq X$. Metrický prostor $(Y, \varrho \restriction_{[Y \times Y]})$ nazýváme podprostorem (X, ϱ), značíme $Y \leq X$.*

Pozorování. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $Y \leq X$, $U \subseteq Y$. Potom U je otevřená v $(Y, \varrho) \Leftrightarrow \exists V \subseteq X$, V otevřená v X taková, že $U = V \cap Y$.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$. Množina $M \subseteq X$ se nazývá ε-síť, právě když $\forall m, n \in M, m \neq n$, platí $\varrho(m, n) \geq \varepsilon$.*

Definice. *Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá totálně omezený, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je každá ε-síť konečná.*

Tvrzení. Metrický prostor (X, ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)$, že $B_\varrho(x_1, \varepsilon), B_\varrho(x_2, \varepsilon), \ldots, B_\varrho(x_n, \varepsilon)$ pokrývají X.

Tvrzení.
(a) Nechť (X, ϱ) je totálně omezený metrický prostor, $Y \leq X$, pak (Y, ϱ) je totálně omezený.
(b) Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $Y \leq X$ a (Y, ϱ) je totálně omezený. Potom i $(\overline{Y}, \varrho)$ je totálně omezený.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se nazývá cauchyovská, právě když $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in N)\,(\forall m, n \geq n_0) : \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Definice. *Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá úplný, právě když každá cauchyovská posloupnost má limitu v X.*

Pozorování. Nechť (X, ϱ) je úplný metrický prostor, $Y \leq X$. Potom (Y, ϱ) je úplný, právě když je Y uzavřená.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $Y \subseteq X$. Množina Y se nazývá hustá v X, právě když $\overline{Y} = X$.*

Pozorování. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $Y \subseteq X$. Množina Y je hustá, právě když $(\forall x \in X)\,(\forall r > 0)$ je $\{B_\varrho(x, r) \cap Y\}$ neprázdná.

Věta. (Baire) *Nechť (X, ϱ) je úplný metrický prostor, $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ posloupnost otevřených hustých podmnožin (X, ϱ). Potom $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ je hustá v (X, ϱ).*

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Potom $\{C_\alpha \subseteq X\}$ pro $\alpha \in I$, kde I je nějaká indexová množina, nazveme otevřeným pokrytím, právě když jsou všechny C_α otevřené v X a $X \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} C_\alpha$.*

Definice. *Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá kompaktní, právě když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečně mnoho množin takových, že tyto množiny stále tvoří otevřené pokrytí.*

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. O $\{M_\alpha \subseteq X\}$ pro $\alpha \in I$, kde I je nějaká indexová množina, řekneme, že má konečnou průnikovou vlastnost, právě když kdykoliv z něj vybereme konečně mnoho množin M_{α_i}, potom průnik těchto množin je neprázdný.*

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subseteq X$, $x \in X$. Řekneme, že x je hromadným bodem množiny M, právě když pro každou G otevřenou obsahující x je $G \cap M$ neprázdný. Pozor, bod x nemusí ležet uvnitř M.*

Věta. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*
(a) (X, ϱ) je kompaktní.
(b) Každý soubor $\{F_\alpha \subseteq X\}$ sestávající z uzavřených množin mající konečnou průnikovou vlastnost má neprázdný průnik.
(c) Každá nekonečná $M \subseteq X$ má hromadný bod v X.
(d) Z každé posloupnosti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.
(e) Každá spojitá funkce $f : (X, \varrho) \to \mathbb{R}$ je omezená.
(f) Každá spojitá funkce $f : (X, \varrho) \to \mathbb{R}$ nabývá svého maxima a minima.
(g) Z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Věta. *Metrický prostor (X, ϱ) je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důsledek. (Heine-Borel-Lebesgueova věta) Podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřený a omezený.

Příklady

Příklad 1. Dokažte, že následující tvrzení v metrickém prostoru (X, ϱ) jsou pro $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ ekvivalentní:
(a) f je spojitá.
(b) $\forall M \subseteq X : f\left[\overline{M}\right] \subseteq \overline{f[M]}$.
(c) $\forall M \subseteq Y : \overline{f_{-1}[M]} \subseteq f_{-1}\left[\overline{M}\right]$.

Příklad 2. Nechť k je přirozené číslo, definujme pro $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\varrho(x, x) = 0,$$
$$\varrho(x, y) = 2^{-p} \text{ pro } (x \neq y),$$

kde p je největší mocnina k v prvočíselném rozkladu $|x - y|$. Dokažte, že $(\mathbb{Z}, \varrho)$ je metrický prostor.

Příklad 3. Rozhodněte, zda je metrický prostor z předchozího příkladu úplný.

Příklad 4. Dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Příklad 5. Rozmístěte n bodů na kružnici, aby ohraničovaly co možná největší obsah.

Příklad 6. Najděte n-úhelník minimálního obvodu s jednotkovým obsahem.