Prostory metrické a jiné

Alexander „Olin“ Slávik

Abstrakt. V příspěvku jsou rozebrány základní vlastnosti metrických prostorů a jejich vztah k dalším důležitým prostorům. Uvedeny jsou rozličné příklady metrických prostorů.

V matematice i v praktických aplikacích jsme často postaveni do situace, kdy bychom o nějakých objektech chtěli říct, že jsou nějak „blízko“ či „daleko“, přičemž bychom byli rádi, aby tato vzdálenost měla „rozumné“ vlastnosti. Metrika je asi nejpřirozenější konstrukcí, která tyto myšlenky formalizuje.

Definice. *Metrikou* na množině X rozumíme funkci $\varrho\colon X \times X \to \langle 0, \infty)$ splňující

(i) $\varrho(x, y) = 0$, právě když $x = y$,
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ pro všechna $x, y, z \in X$ (trojúheníková nerovnost).

Dvojici (X, ϱ) pak nazveme *metrickým prostorem*.

Příklady.

(i) Asi nejběžnější metrikou na $\mathbb{R}^n$ je *euklidovská*, která odpovídá vzdálnosti, na kterou jsme zvyklí:

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Jinou možnou metrikou je *manhattanská* či *newyorská*:

$$\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Konečně je zde i *maximová* metrika:

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

(ii) Na množině[17] $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ máme taky maximovou metriku,

$$\varrho_{\max}(f, g) = \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x) - g(x)|,$$

Klíčová slova. Metrický prostor, metrika, norma, skalární součin, vektorový prostor, topologický prostor

[17] $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ značí množinu všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

navíc zde máme i *integrální* metriku

$$\varrho_{\text{int}}(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

a mnohé další.

(iii) Na úplně každé množině můžeme definovat *diskrétní metriku* předpisem

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = y, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(iv) Nechť X je množina všech (konečných) slov nad nějakou abecedou Σ. Na slovech si povolíme operace přidání libovolného písmene ze Σ kamkoliv do slova, odstranění kteréhokoliv písmene ve slově a nahrazení kteréhokoliv písmene libovolným jiným. Pro $a, b \in X$ definujeme metriku[18] $\varrho(a,b)$ jako nejmenší počet těchto operací, které potřebujeme k tomu, abychom slovo a transformovali na slovo b.

(v) Buď G (konečný jednoduchý) souvislý graf, V množina jeho vrcholů. Pro $u, v \in V$ můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako délku nejkratší cesty z u do v v G.

(vi) Označme ještě E množinu hran grafu G. Každou hranu $e \in E$ „ohodnotíme“ nějakým kladným reálným číslem $f(e)$. Je-li C cesta v G používající hrany $e_1, e_2, \ldots, e_n$, pak její ohodnocenou délkou nazveme číslo $f(e_1) + f(e_2) + \cdots + f(e_n)$. Pro $u, v \in V$ pak můžeme definovat metriku $\varrho(u,v)$ jako nejmenší možnou ohodnocenou délku cesty z u do v.

Cvičení 1. Jaké problémy mohou nastat, pokud u grafů v bodech (v) a (vi) vynecháme předpoklad souvislosti nebo předpoklad konečnosti? Musí být ohodnocení hran kladné? Jak se situace změní, pokud budeme uvažovat multigrafy (tj. povolíme více hran mezi dvěma vrcholy), nebo naopak orientované grafy, ve kterých budeme brát v potaz pouze orientované cesty?

Cvičení 2. Na políčkách šachovnice 8×8 uvažme pro každá dvě pole nejmenší počet tahů, kterou musíme udělat králem, resp. věží, resp. koněm, resp. střelcem, abychom figuru přemístili z jednoho pole do druhého. Ve kterých případech jde o metriku? Jak tato metrika souvisí s metrikami uvedenými výše?

Cvičení 3. Ukažte, že ke každému metrickému prostoru (X, ϱ) existuje (nekonečný, je-li to zapotřebí) graf s ohodnocenými hranami, jehož vrcholy jsou prvky X a konstrukce metriky dle bodu (vi) výše dá přesně metriku ϱ.

Cvičení 4. Uvažme graf G, který získáme z $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$ podle řešení cvičení 3. Lze z tohoto grafu některé hrany odstranit tak, abychom podle postupu (vi) získali metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \varrho_1)$ nebo $(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty)$? Co se stane, pokud v G ponecháme pouze hrany spojující body $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ takové, že $x_1 y_2 = x_2 y_1$?

[18] Tato metrika se obvykle nazývá *Levenshteinova vzdálenost*.

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor, $x \in X$ a $r \in (0, \infty)$. Množinu

$$B_\varrho(x, r) = \{y \in X : \varrho(x, y) < r\}$$

nazveme *(otevřenou) koulí* se středem v x a poloměrem r.

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subseteq X$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $x \in G$ existuje $r \in (0, \infty)$ takové, že $B_\varrho(x, r) \subseteq G$. Řekneme, že množina $F \subseteq X$ je *uzavřená*, pokud je $X \setminus F$ otevřená.

Příklad. Jak lze vytušit z terminologie, v $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou jsou otevřené intervaly otevřené, analogicky uzavřené intervaly jsou uzavřené. Nejde ovšem o všechny otevřené/uzavřené množiny!

Příklad. V metrických prostorech $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$, $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$ a $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ jsou tytéž množiny otevřené – to platí díky nerovnosti

$$\varrho_\infty(x, y) \leq \varrho_2(x, y) \leq \varrho_1(x, y) \leq n \cdot \varrho_\infty(x, y).$$

Cvičení 5. Popište všechny otevřené množiny v prostoru s diskrétní metrikou.

Cvičení 6. Dokažte, že pokud je množina otevřená v prostoru $\big(\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle), \varrho_{\text{int}}\big)$, tak je otevřená i v $\big(\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle), \varrho_{\max}\big)$, ale opačná implikace obecně neplatí.

Věta. (Vlastnosti otevřených množin)

- (O1) *Celý prostor a prázdná množina jsou otevřené množiny.*
- (O2) *Sjednocení (libovolně velkého) systému otevřených množin je otevřená množina.*
- (O3) *Průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.*[19]

Cvičení 7. Ukažte, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin již nemusí být otevřenou množinou.

Konvergence a spojitost v metrických prostorech

Jakmile máme vybudován aparát limit a spojitých funkcí v reálných číslech, velmi snadno tyto pojmy přeneseme do metrických prostorů.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z metrického prostoru (X, ϱ) má *limitu* x (značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), pokud platí $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Má-li posloupnost limitu, nazývá se *konvergentní*.

Lemma. *Množina F v metrickém prostoru (X, ϱ) je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z F je $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$ (neformálně, z uzavřené množiny nelze „vykonvergovat ven“).*

[19] Odtud snadno plyne, že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Věta. (Weierstrassova) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$ existuje posloupnost polynomů $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f = \lim_{n\to\infty} p_n$, kde limitu uvažujeme v maximové metrice.*

Definice. Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že funkce $f\colon X \to Y$ je *spojitá*, pokud pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z X platí

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Řečeno méně formálně, funkce je spojitá, pokud „zachovává limity posloupností“.

Věta. *Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory. Funkce $f\colon X \to Y$ je spojitá právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $G \subseteq Y$ je vzor této množiny v f, tj. množina*

$$f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$$

otevřená (v X).

Poznámka. Uvedená věta naznačuje, že pojem spojitosti funkcí není nijak hluboce závislý na konkrétních metrikách, které na množinách máme, rozhodující je pouze informace, které množiny jsou v daných prostorech otevřené. Tato skutečnost je motivací pro pojem struktury obecnější, než je metrický prostor, tzv. *topologického prostoru*. Uvedeme pouze formální definici.

Definice. Buď X množina a $\mathcal{G}$ nějaký systém jejích podmnožin. $\mathcal{G}$ nazveme *topologií na X*, pokud jeho množiny splňují podmínky (O1), (O2) a (O3). Množiny z $\mathcal{G}$ pak nazveme *otevřené* množiny a dvojici $(X,\mathcal{G})$ *topologický prostor*.

Prostory s normou či skalárním součinem

Množiny, na kterých zavádíme metriky, zpravidla nebývají nějaké úplně abstraktní – často na nich již máme nějakou jinou strukturu. U takových množin bychom „byli rádi“, kdyby námi definovaná metrika nějak „souhlasila“ s již existující strukturou. Běžným příkladem takové struktury je vektorový prostor, na který se nyní trochu blíže podíváme.

Definice. Nechť V je libovolná množina, $+\colon V\times V \to V$ a $\cdot\colon \mathbb{R}\times V \to V$ binární operace takové, že

(i) existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ takový, že pro všechna $\mathbf{v} \in V$ je $\mathbf{v}+\mathbf{o}=\mathbf{v}$,
(ii) pro všechna $\mathbf{v} \in V$ existuje $\mathbf{w} \in V$ takový, že $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{o}$, značíme $\mathbf{w}=-\mathbf{v}$,
(iii) pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ je $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$,
(iv) pro všechna $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ je $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$,
(v) pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$ je $a\cdot(b\cdot\mathbf{v})=(a\cdot b)\cdot\mathbf{v}$,
(vi) pro všechna $\mathbf{v} \in V$ je $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$,

(vii) pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$,
(viii) pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$ je $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

Pak čtveřici $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ nazveme *vektorovým* (či *lineárním*) *prostorem nad* $\mathbb{R}$.

Definice. Buď $(V, +, \cdot, \mathbf{o})$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci $\|\cdot\| \colon V \to \langle 0, \infty)$ nazveme *normou* na V, pokud platí

(i) $\|\mathbf{v}\| = 0$, právě když $\mathbf{v} = \mathbf{o}$,
(ii) pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$ je $\|a \cdot \mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$,
(iii) pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Poznámka. Každá norma na vektorovém prostoru přirozeně definuje metriku na tomto prostoru předpisem $\varrho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Normu tedy můžeme chápat jednak jako „velikost“, jednak jako „vzdálenost od nuly“.

Příklady. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ s běžnými operacemi můžeme definovat normy

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},\\
\|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,\\
\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\},
\end{aligned}$$

na prostoru $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$ zase

$$\|f\|_{\max} = \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)|, \qquad \|f\|_{\text{int}} = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Metriky uvedené na začátku příspěvku jsou generovány právě těmito normami.

Definice. Binární operaci $\cdot \colon V \times V \to \mathbb{R}$ nazveme *skalárním součinem* na prostoru V, pokud platí

(i) pro všechna $\mathbf{v} \in V$ je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, přičemž $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$, právě když $\mathbf{v} = \mathbf{o}$,
(ii) pro všechna $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$,
(iii) pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je $(a \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,
(iv) pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Poznámka. Pomocí skalárního součinu lze na vektorovém prostoru definovat normu předpisem $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Ne každá norma ale odpovídá nějakému skalárnímu součinu – takové normy musí splňovat rovnoběžníkové pravidlo, tj. pro každé $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ musí platit

$$2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Příklad. Běžný skalární součin na $\mathbb{R}^n$ se definuje jako

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Cvičení 8. Najděte nějaký skalární součin na prostoru $\mathcal{C}(\langle 0, 1\rangle)$. Jaká norma (metrika) tomuto skalárnímu součinu odpovídá?

Věta. (Cauchy-Schwarz-Buňakovského nerovnost) *Je-li* $\|\cdot\|$ *norma generovaná příslušným skalárním součinem, pak pro libovolné* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *platí*

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|.$$

Literatura a zdroje

[1] P. Simon, V. Musil, *Poznámky k přednášce Základy teorie metrických prostorů*, dostupné z *http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~vejtek/studium/files/metrprs/metrSpc.pdf*