Metrické prostory

Páťa Rexová

Definice. *Buď X množina. Funkce $\varrho : X \times X \to [0, \infty)$, která dvojicím bodů z X přiřazuje nezáporné číslo (jejich vzdálenost), se nazývá metrikou, jestliže:*
(i) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.
(iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Dvojice (X, ϱ) se nazývá metrický prostor.

Příklad. Eukleidovská metrika na přímce: $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$.

Příklad. Eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^n$: $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Úkol. Dokažte, že toto je opravdu metrika (zkuste využít Cauchyho nerovnost).

Příklad. Diskrétní metrický prostor: $X \neq \emptyset$, $\varrho(x, y) = 0$ pro $x = y$, $\varrho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$.

Příklad. Chicagská metrika: $X = \mathbb{R}^2$, $\varrho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Příklad. Poštovní metrika.

Příklad. Supremová metrika: $X = \{f : f \text{ je funkce }, f : Y \to [0, 1]\}$, kde Y je množina (definiční obor), $\varrho(f, g) = \sup\limits_{y \in Y} |f(y) - g(y)|$.

Definice. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subseteq X, x \in X$. Pak vzdálenost bodu x od množiny M definujeme předpisem $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \varrho(x, y)$.*

Úkol. Rozmyslete si příklad, kdy je tato vzdálenost nulová a přitom $x \notin M$.

Definice. *Otevřená koule o středu x a poloměru ε je množina*

$$B_\varrho(x, \varepsilon) = \{y \in X; \varrho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Úkol. Rozmyslete si, jak vypadají koule v metrických prostorech uvedených v předchozích příkladech.

Definice. *(X, ϱ) buď metrický prostor. Řekneme, že množina $O \subset X$ je okolím bodu x, pokud pro nějaké kladné ε je $B_\varrho(x, \varepsilon) \subset O$.*

Definice. *(X, ϱ) buď metrický prostor, $x_1, x_2, \dots \in X$ buď posloupnost. Řekneme, že tato posloupnost konverguje k bodu $x \in X$, pokud ke každému okolí O bodu x existuje n takové, že $x_n, x_{n+1}, \dots$ všechna leží v O.*

Definice. *Množině $G \subset X$ říkame otevřená, když pro každý její bod $x \in G$ existuje okolí tohoto bodu O tak, že $O \subset G$. Množinu $F \subset X$ zveme uzavřená, je-li její doplněk $X \setminus F$ otevřená množina.*

Ponechávám ve sborníčku pouze stručný úvod do metrických prostorů. Předneseno bude patrně víc.