Metoda obsahů

Pavel Šalom

Cílem přednášky je dokázat některé zajímavé věty tzv. metodou obsahů, ukázat použití těchto vět a vyřešit několik příkladů, které chytře využívají vlastností obsahů nebo se jich jiným způsobem týkají.

Spokojíme se s intuitivní představou obsahu a bohatě si vystačíme s jedinou definicí, a sice, že obdélník se stranami délek a, b má obsah $S = ab$.

Tvrzení, která si na přednášce ukážeme:

(1) **Kosinová věta:** Při standardním značení v trojúheníku platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

Poznámka. Volbou $\gamma = 90°$ dostaneme tzv. Pythagorovu větu (Pythagoras žil 580–500 př. n. l.).

(2) **Sinová věta:** Při standardním značení v trojúhelníku platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

(3) Buď S obsah trojúhelníku, ϱ poloměr kružnice vepsané a s polovina jeho obvodu (tedy $s = \frac{a+b+c}{2}$), potom platí $S = \varrho s$.

(4) **Heronův vzorec (asi 60 n. l.; 10–70 n. l.):** Obsah trojúhelníku lze vyjádřit pomocí jeho stran jako

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

(5) Jednoduché, netýká se obsahů, ale překvapivě velmi užitečné. Pro $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

(6) **Cevova věta (1678; 1647–1734):** [čévova] V trojúhelníku $\triangle ABC$ buďte X, Y, Z po řadě body na stranách a, b, c. Přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom bodě právě když

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|BY|} = 1.$$

(7) **Menelaova věta (70–140 n. l.):** Mějme trojúhelník $\triangle ABC$ a buďte X, Y, Z po řadě body na přímkách určených stranami a, b, c. Body X, Y, Z leží na přímce právě když

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|BY|} = 1.$$

(8) **van Aubelova věta (1830–1906):** V trojúhelníku $\triangle ABC$ buďte X, Y, Z po řadě body stranách a, b, c tak, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jediném bodě M. Potom

$$\frac{|CM|}{|ZM|} = \frac{|CY|}{|AY|} + \frac{|CX|}{|BX|}$$

nebo též ekvivalentně

$$\frac{|CM|}{|CZ|} + \frac{|BM|}{|BY|} + \frac{|AM|}{|AX|} = 2.$$

(9) Je dán $\triangle ABC$ a uvažujme takové body P, že trojúhelníky $\triangle APC$ a $\triangle BPC$ mají stejný obsah. Množina všech takových bodů je přímka, na níž leží těznice na stranu c.

Zobecnění: Je-li navíc dán poměr $\lambda \in \mathbb{R}^+$, množina všech bodů P takových, že $\frac{S(\triangle APC)}{S(\triangle BPC)} = \lambda$, je přímka (v předchozím tvrzení je pro $\lambda = 1$ touto přímkou těžnice).

(10) Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a obsah $S_0 \in \mathbb{R}^+$. Množina všech bodů P takových, že $S(\triangle ABP) + S(\triangle CDP) = S_0$ je přímka.

Příklady

Na přednášce si ukážeme následující hrst úloh:

Příklad 1. (IMO 1987, úloha 2) Je dán ostroúhlý trojúhelník $\triangle ABC$. Osa úhlu procházející vrcholem A protne stranu BC v bodě L a kružnici opsanou v bodě N. Z bodu L veďme kolmice na strany AB, AC a jejich paty označme po řadě K, M. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $AKMN$ je stejný jako obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

Příklad 2. Je dán obvod trojúhelníka. Jak máme zvolit jeho strany, aby měl co největší obsah?

Příklad 3. (MO 54. ročník, úloha 3) V lichoběžníku $ABCD$ $(AB||CD)$ označme E střed strany BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ těčnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b}.$$

Příklad 4. Buď $ABCDE$ konvexní pětiúhelník takový, že úhly při vrcholech B, E jsou pravé a navíc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAD$. Buď O průsečík BD a CE. Dokažte, že AO a BE jsou kolmé.

Příklad 5. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a body M_1, M_2 na straně BC. Nechť jsou dále X_1, X_2 body na straně AB takové, že $M_iX_i \,||\, AC$ a Y_1, Y_2 body na straně AC takové, že $M_iY_i \,||\, AB$ pro $i = 1, 2$. Dokažte, že potom body A, P, R leží na přímce.

Příklad 6. (PraSe 23. ročník, 5. série, úloha 4) Je dán trojúhelník $\triangle ABC$, označme T jeho těžiště. Přímka rovnoběžná s BC procházející bodem T protíná stranu AB v bodě B' a stranu AC v bodě C'. Nechť A'' je střed strany BC, C'' průsečík BC' a CT, B'' průsečík $B'C$ a BT. Dokažte, že trojúhelník $\triangle A''B''C''$ je podobný trojúhelníku $\triangle ABC$.

Příklad 7. V $\triangle ABC$ označme D, E, F po řadě ty body, ve kterých se kružnice vepsaná dotýká stran BC, CA, AB. Na stranách EF, FD, DE jsou po řadě zvoleny body M, N, P. Dokažte, že přímky DM, EN, FP se protínají právě tehdy, když se protínají přímky AM, BN, CP.

Příklad 8. (PraSe 24. ročník, 2. série, úloha 6) Nechť H je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$ a D průsečík osy úhlu $\sphericalangle ACB$ se stranou AB. V závislosti na délkách stran $\triangle ABC$ vyjádřete poměr $|CH| : |DH|$.

Příklad 9. Je dána kružnice k se středm S a přímka AB dotýkající se k v bodě B. Po otočení přímky AB kolem středu S označme obrazy bodů A, B po řadě A', B'. Dokažte, že přímka AA' půlí úsečku BB'.

Příklad 10. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, který není rovnoběžník. Nechť P, Q značí po řadě středy jeho úhlopříček AC, BD a přímka PQ protíná stranu BC v bodě R. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků $\triangle ABR$ a $\triangle CDR$ je roven obsahu trojúhelníku $\triangle ARD$.

Příklad 11. (IMO 2006, úloha 6) Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který leží celý v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P.