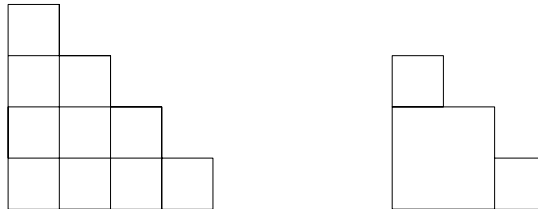


OHNĚM a MEČEM

Příklad. (Rytířská porada) Na koncil do Kamelotu přijelo $n \geq 4$ rytířů, kteří se posadili kolem kruhového stolu. Podle velikosti jejich meče jim byla přidělena čísla $1, 2, \dots, n$. Dvojici (a, b) rytířů s čísly a a b nazveme *sokové*, jestliže $a < b$, rytíř a nesedí vedle rytíře b a alespoň jeden z oblouků určených rytíři a a b obsahuje pouze rytíře s menším číslem než a . V závislosti na n určete počet soků.

Příklad. (Na kameni kámen) Na Kamelotu se staví schody do magické věže z kvádrů o čtvercovém průřezu. Schody velikosti n se skládají z n pater, první patro o n kamenných kvádrech, druhé patro o $n-1$ kvádrech, \dots , poslední patro obsahuje jeden kvádr. Na prvním obrázku jsou nakresleny schody velikosti 4. Líní zedníci si však zjednodušují práci tím, že místo malých kvádrů používají kvádry větších velikostí, tak jako na druhém obrázku kvádr velikosti 2. Zjistili například, že schody velikosti $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, umí postavit právě z n kvádrů, což velice zefektivnilo jejich práci. Pomožte jim najít všechny hodnoty n takové, že schody velikosti n jdou postavit z právě $n+1$ kamenných kvádrů.



Příklad. (Polní dilema) Rytíř Francelot (ze Samelotu) stojí na kraji pole tvaru kružnice, které se dotýká dvou cest v bodech K a L . Mezi K, L je vyšlapaná pěšinka. Dokažte, že součin vzdáleností Francelota od těchto cest je roven druhé mocnině jeho vzdálenosti od pěšinky.

Příklad. (Na stopě grálu) K určení místa, v němž je ukryt svatý grál chybí už jen zjištění magického úhlu. Až bude ten znám, je postup následující:

„Utvor ostroúhlý trojuhelník mezi městy Adwick, Bolton a Chesterfield. Jeho ortocentrum leží ve městě Huddersfield. Huddersfieldem postav rovnou cestu, která s rovníkem svírá orientovaný magický úhel. K ní postav tři symetrické cesty, každá z nich bude osovým obrazem podle jedné ze stran trojuhelníka. Tam, kde se tyto tři cesty protnou, najdeš svatý grál.“

Ukažte, že návod není vadný a tyto tři cesty se skutečně protnou v jednom bodě pro každou hodnotu magického úhlu.

Příklad. (Zlé proroctví) Merlinovi se zdál prorocký sen o tom, ve kterých letech na svět udeří ohromné katastrofy. Letopočty byly vyjádřeny čísly, která mohou udávat počet nenulových koeficientů polynomu tvaru

$$(ax + b)^{2010} - (cx + d)^{2010}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

O jakých letech se Merlinovi zdálo?

Příklad. (Hladomorna) Artuš dostal od Merlina darem magický kvadratický trojčlen $f(x) = x^2 + ax + b$. Pro magický trojčlen platilo, že rovnice $f(f(x)) = 0$ má čtyři reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), přičemž součet nějakých dvou z nich byl roven -1 . Artuš ovšem nebyl spokojen s tím, že $b \leq -1/4$ a zavřel Merlina do kobky, dokud mu nevymyslí trojčlen se stejnými vlastnostmi, který by měl $b > -1/4$. Jak dlouho stráví Merlin v kobce?