Jardelot s Kennylotem uvádějí

OHNĚM a MEČEM

Příklad. (Rytířská porada) Na koncil do Kamelotu přijelo $n \geq 4$ rytířů, kteří se posadili kolem kruhového stolu. Podle velikosti jejich meče jim byla přidělena čísla $1, 2, \dots, n$. Dvojici (a, b) rytířů s čísly a a b nazveme *sokové*, jestliže $a < b$, rytíř a nesedí vedle rytíře b a alespoň jeden z oblouků určených rytíři a a b obsahuje pouze rytíře s menším číslem než a. V závislosti na n určete počet všech možných dvojic soků.

Návod. Ukážeme, že počet soků je vždy $n-3$. Vezměme $1 \leq k \leq n-3$ a pro něj vytvoříme jeden pár (a, b) soků. Zatímco rytíř a bude první rytíř po pravici rytíře k, jehož číslo je větší než k, rytíř b bude první rytíř po levici, jehož číslo je větší než k. Tento pár (a, b) není sousedící (na jednom oblouku je mezi nimi rytíř k, na druhém jeden z trojice rytířů $n, n-1, n-2$), platí $a < b$ (pokud neplatí, tak vezmem pár (b, a)) a oblouk obsahující rytíře k je tvořen jen rytíři s menšími čísly než k, tedy i než a, b. A proto dvojice (a, b) jsou sokové.

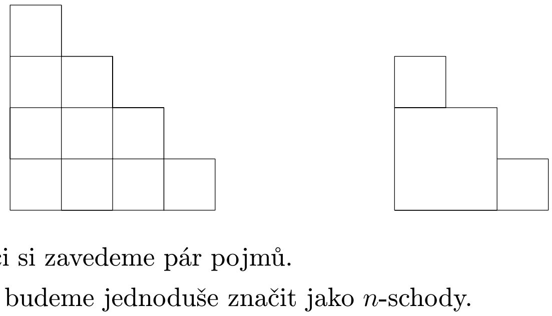
Nyní dokážeme, že každý pár soků (a, b) vznikl předchozím algoritmem z nějakého čísla $1 \leq m \leq n-3$ právě jedním způsobem. Předpokládejme, že (a, b) jsou sokové, alespoň jeden z nich různý od $n, n-1$. Pak jeden z oblouků nad a a b obsahuje rytíře h s číslem větším než alespoň jeden z dvojice a, b. Druhý oblouk obsahuje pouze rytíře s menším číslem než a i b, označme m největšího z nich. Pak dvojice (a, b) vznikne z m předchozím algoritmem. Kdyby zároveň (a, b) vznikla i z jiného čísla l, pak l musí ležet ve stejném oblouku jako m a jeden z dvojice (a_0, b_0) soků, kteří vznikli z l musí mít číslo menší nebo rovno m, což je spor.

Jediná nevyšetřená dvojice soků je tedy $(n-1, n)$. Ta může, ale nemusí existovat. Pokud existuje, pak jeden z oblouků obsahuje rytíře $n-2$. Snadno se ověří, že sokové $(n-1, n)$ vznikli z největšího čísla z druhého oblouku, které je vejvýše $n-3$. Obdobně jako výše se ověří, že tito sokové nemohli vzniknout z žádného jiného čísla l.

Proto máme bijekci mezi čísly $1, 2, \dots, n-3$ a dvojicemi soků, tedy počet soků je vždy $n-3$.

Poznámka. Druhé trikové řešení dostaneme, pokud si v n-úhelníku daném pozicí rytířů kolem stolu vždy spojíme oba soky. Výsledný obrázek pak bude triangulace n-úhelníka(nutné ověřit), která má vždy $n-3$ úhlopříček.

Příklad. (Na kameni kámen) Na Kamelotu se staví schody do magické věže z kvádrů o čtvercovém průřezu. Schody velikosti n se skládají z n pater, první patro o n kamenných kvádrech, druhé patro o $n-1$ kvádrech, …, poslední patro obsahuje jeden kvádr. Na prvním obrázku jsou nakresleny schody velikosti 4. Líní zedníci si však zjednodušují práci tím, že místo malých kvádrů používají kvádry větších velikostí, tak jako na druhém obrázku kvádr velikosti 2. Zjistili například, že schody velikosti $n = 2^k - 1,\ k \in \mathbb{N}$, umí postavit právě z n kvádrů, což velice zefektivnilo jejich práci. Pomožte jim najít všechny hodnoty n takové, že schody velikosti n jdou postavit z právě $n+1$ kamenných kvádrů.



Návod. Pro snazší orientaci si zavedeme pár pojmů.

(i) Schody o velikosti n budeme jednoduše značit jako n-schody.
(ii) Kvádr, který obsahuje levý spodní roh schodů, budeme nazývat *hlavním kvádrem.*
(iii) Pravý horní roh hlavního kvádru budeme nazývat *hlavním vrcholem.*

(iv) Ty vrcholy schodů, které jsou součástí přesně jednoho čtverečku, a které nejsou částí spodní ani levé boční stěny, budeme značit jako *rohové vrcholy.*

(v) Schody o velikosti n pokryté přesně n kvádry nazveme *skvěle pokryté.*

(vi) Schody o velikosti n pokryté přesně $n+1$ kvádry nazveme *dobře pokryté.*

Pozorování. Žádný kvádr nemůže pokrývat dva rohové vrcholy.

Lemma. *Schody o velikosti n nelze pokrýt méně než n kvádry.*

Důkaz. Schody o velikosti n mají právě n rohových vrcholů a podle předchozího pozorování je tedy potřeba alespoň n kvádrů.

Lemma. *Schody o velikosti n lze skvěle pokrýt, právě když $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Takové pokrytí je pak určeno jednoznačně a skládá se z kvádrů o velikosti mocnin dvojky.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Postupujme indukcí. Schody o velikosti 1 lze skutečně pokrýt pouze $1 = 2^1 - 1$ kvádru. Vezměme nyní skvěle pokryté n-schody a předpokládejme, že pro $m < n$ lze m-schody skvěle pokrýt pouze pro $m = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Jelikož rohových vrcholů je přesně n, musí každý kvádr obsahovat právě jeden z nich. Hlavní vrchol je pak jeden z rohových vrcholů a dělí n-schody na dvoje stejně velké schody o velikosti $(n-1)/2$, které jsou dohromady pokryté pomocí $n-1$ kvádrů. Ty pak musí být též skvěle pokryté a indukční předpoklad nám dá výsledek.

„$\Leftarrow$“: Konstrukci (jednoznačnou) provedeme indukcí. Pro $k = 1$ je to lehké a indukční krok $k \to k+1$ se provede nalepením dvou n-schodů na hlavní kvádr o straně $n + 1 = 2^k$ (jednou lepíme zvrchu a jednou zprava). Již víme, že taková poloha hlavního vrcholu je nutná a tím máme jednoznačnost i podobu.

Lemma. (Klíčové) *Pokud jsou n-schody dobře pokryté a hlavní vrchol leží „uvnitř“ schodů, pak je toto pokrytí sjednocením hlavního kvádru a dvou (ne nutně disjunktních) skvěle pokrytých schodů.*

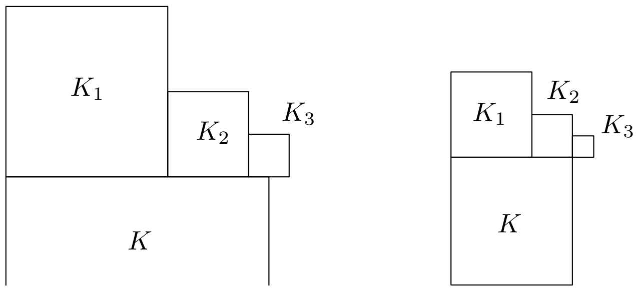
Důkaz. Krom hlavního kvádru K musí již každý kvádr pokrývat jeden z rohových vrcholů, čímž jsou tyto kvádry jednoznačně určeny. Vyberme z nich posloupnost K_i, $i = 1, 2, \dots, m+1$ s následujícími vlastnostmi.

(i) Kvádr K_1 obsahuje levý horní roh kvádru K

(ii) Kvádr K_{i+1} obsahuje pravý spodní roh kvádru K_i

(iii) Kvádr K_m je poslední, který sousedí s K celou svou hranou.

Dvě takové posloupnosti kvádrů K_i jsou na následujícím obrázku.



I tyto kvádry jsou určeny jednoznačně. Pokud by tedy kvádry K_{m+1} a K měly společnou část hrany (jako na prvním obrázku), pak lze (ze symetrie) podobnou posloupnost kvádrů K'_i vytvořit i „podél“ pravé hrany kvádru K a tedy kvádry K_{m+1} a K'_{m+1} se překrývají a nejsou totožné, což je spor. Proto kvádry K a K_{m+1} mají společný pouze jeden bod (jako na druhém obrázku). Oblast mezi K_m a K'_m tvoří schody, které navíc musí být skvěle pokryté. Podobně pak i ta část schodů, která leží nad přímkou horní hrany K. Tedy dostáváme, že každé dobré pokrytí s hlavním vrcholem „uvnitř“ je sjednocením kvádru K a dvou skvěle pokrytých schodů, které se protínají právě v oblasti mezi K_m a K'_m.

Lemma. *Schody o velikosti $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ nelze dobře pokrýt.*

Důkaz. Pro změnu zvolme extremální princip[1] a pro spor vezměme nejmenší k takové, že schody o velikosti $n = 2^k - 1$ lze dobře pokrýt. Pokud je hlavní vrchol jedním z rohových vrcholů pak pokrýváme dvoje schody velikosti $2^{k-1} - 1$ celkem $(n+1) - 1 = 2^k - 1$ kvádry. Jedny z nich pak musí být dobře pokryté, což je spor s předpokládanou minimalitou.

[1] Ale samozřejmě by fungovala i indukce.

Pokud je hlavní vrchol „uvnitř“ schodů, pak podle předchozího lemmatu existují skvěle pokryté m-schody, kde $m \geq (n+1)/2 = 2^{k-1}$. Zároveň samozřejmě $m < 2^k - 1$ a tedy $m \neq 2^l - 1$ pro žádné $l \in \mathbb{N}$ a máme též spor.

Vrhněmě se nyní na samotnou úlohu. Pokud by hlavní vrchol splýval s jedním z rohových, pak potřebujeme pokrýt dvoje stejně velké schody jednou dobře a jednou skvěle, což podle předchozích lemmat nelze.

Hlavní vrchol tedy musí ležet uvnitř a stejně jako v klíčovém lemmatu zavedeme posloupnost kvádrů K_i a označme h_i délky jejich hran. Víme, že pro délku hrany h hlavního kvádru platí

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_m,$$

avšak h_i je sestupná posloupnost mocnin dvojky (jsou částí skvělého pokrytí) a můžeme tedy psát

$$h = 2^{s+m-1} + 2^{s+m-2} + \cdots + 2^s = 2^s(2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 1) = 2^s(2^m - 1), \quad s, m \in \mathbb{N}_0.$$

Jelikož velikost p skvěle pokrytých schodů, které jsou nad přímkou horní hrany K je podle podoby skvělého pokrytí rovna

$$p = 2^{s+m-1} + 2^{s+m-2} + \cdots + 1 = 2^{s+m} - 1,$$

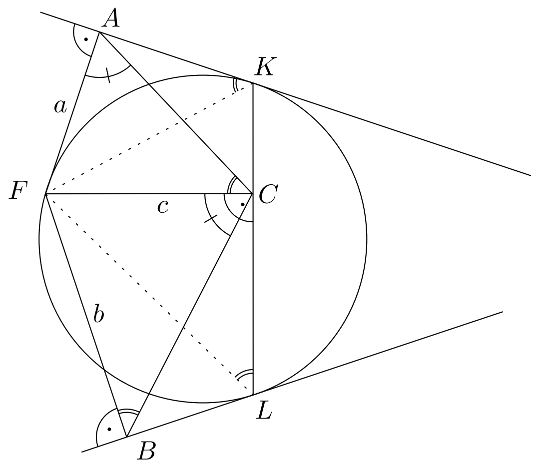
snadno již dopočteme celkovou velikost schodů, která je rovna

$$h + p = 2^s(2^m - 1) + 2^{s+m} - 1 = 2^{s+m+1} - 2^s - 1.$$

Všechny hledané hodnoty n jsou tedy tvaru $2^{s+m+1} - 2^s - 1$.

Příklad. (Polní dilema) Rytíř Francelot (ze Samelotu) stojí na kraji pole tvaru kružnice, které se dotýká dvou cest v bodech K a L. Mezi K, L je vyšlapaná pěšinka. Dokažte, že součin vzdáleností Francelota od těchto cest je roven druhé mocnině jeho vzdálenosti od pěšinky.

Návod. Označme si F pozici Francelota, dané vzdálenosti od cest a pěšinky a, b, c a příslušné paty kolmic A, C, B, viz obrázek.



Nejprve předpokládejme, že bod C bude ležet na úsečce KL. Pak chceme dokázat $ab = c^2$, což není nic jiného než $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, neboli bychom chtěli podobnost $\triangle BCF$ a $\triangle FCA$. Jelikož je čtyřúhelník $BLCF$ tětivový, platí $|\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle FLC|$. Dále máme z vlastností úsekového úhlu $|\sphericalangle FLK| = |\sphericalangle FKA|$, a díky tětivovému čtyřúhelníku $FCKA$ i rovnost $|\sphericalangle FKA| = |\sphericalangle FCA|$. Celkově tedy

$$|\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle FLC| = |\sphericalangle FLK| = |\sphericalangle FKA| = |\sphericalangle FCA|.$$

Obdobně by se dokázala rovnost $|\sphericalangle BCF| = |\sphericalangle CAF|$, a tedy podle věty uu je ΔBCF podobný ΔCAF a platí dokazovaná rovnost $ab = c^2$.

Pokud bude bod C ležet mimo úsečku KL, pak stačí použít obvodové úhly v tětivových čtyřúhelnících $FBCL$ a $FCAK$ a jednou úsekový úhel a dostaneme podobnost $\triangle FBC$ a $\triangle FCA$, z čehož plyne zadaná rovnost.

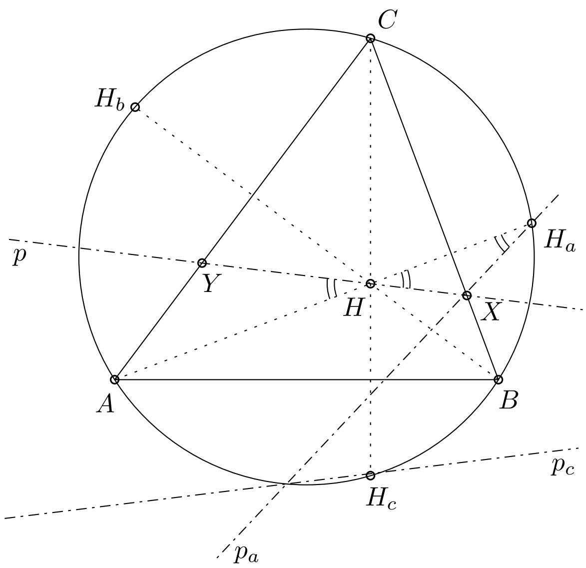
Příklad. (Na stopě grálu) K určení místa, v němž je ukryt svatý grál chybí už jen zjištění magického úhlu. Až bude ten znám, je postup následující:

„*Utvoř ostroúhlý trojuhelník mezi městy Adwick, Bolton a Chesterfield. Jeho ortocentrum leží ve městě Huddersfield. Huddersfieldem postav rovnou cestu, která s rovníkem svírá orientovaný magický úhel. K ní postav tři symetrické cesty, každá z nich bude osovým obrazem podle jedné ze stran trojúhelníka. Tam, kde se tyto tři cesty protnou, najdeš svatý grál.*“

Ukažte, že návod není vadný a tyto tři cesty se skutečně protnou v jednom bodě pro každou hodnotu magického úhlu.

Řešení. (nekorektní) Každá z osově zobrazených přímek prochází jedním z osových obrazů ortocentra podle stran. Otáčení pak můžeme chápat vždy jako otáčení právě podle jednoho z osových obrazů H, tyto obrazy leží na kružnici opsané. Otáčíme-li přímkou kolem bodu ležícího na kružnici, pak její druhý průsečík s touto kružnicí „běhá rovnoměrně“, jelikož obvodový úhel se rovnoměrně zvětšuje. Druhé průsečíky oněch tří přímek s kružnicí opsanou se po ní pohybují stejně rychle. V krajní poloze, kdy původní přímka splývá s výškou, tyto průsečíky splývají. No a díky tomu, že „běhají stejně rychle“, budou takto splývat pořád.

Řešení. (korektní) Pro začátek označme p přímkou vedenou ortocentrem H, dále p_a, p_b, p_c její obrazy podle stran $\triangle ABC$ a konečně H_a, H_b, H_c osové obrazy H též podle stran $\triangle ABC$. Víme tedy, že $H_a \in p_a$ atd. a podle známého tvrzení také víme, že body H_a, H_b, H_c leží na kružnici opsané. Inspirováni předchozím nekorektním postupem dokážeme, že každá z přímek p_a, p_b, p_c protne kružnici opsanou ve stejném bodě, označme kvůli tomu jejich druhé průsečíky s opsanou kružnicí X_a, X_b, X_c. Abychom si usnadnili diskusi, řekneme, že bez újmy na obecnosti protíná přímka p strany BC a AC v bodech X a Y.



Budeme chtít ukázat rovnost úhlů

$$|\sphericalangle X_aAB| = |\sphericalangle X_bAB| = |\sphericalangle X_cAB|.$$

K tomu nám bude stačit, pokud budeme umět všechny tyto úhly vyjádřit pomocí úhlů v trojúhelníku a úhlu φ mezi přímkou p a výškou z vrcholu A (třeba). Uvědomte si, že každý úhel kolem bodu H nyní umíme vyjádřit. Začneme tím, že spočítáme

$$|\sphericalangle X_cH_cC| = |\sphericalangle H_cHY| = |\sphericalangle H_cHA| + |\sphericalangle AHY| = \beta + \varphi,$$

kde jsme v první rovnosti využili osovou souměrnost. Podobně dostaneme

$$|\sphericalangle X_aH_aA| = \varphi \qquad |\sphericalangle X_bH_bB| = \gamma - \varphi.$$

A nyní už jen snadno dokončíme práci jak jinak než pomocí obvodových úhlů.

$$\begin{aligned}|\sphericalangle X_aAB| &= \gamma - |\sphericalangle AH_aX_a| = \gamma - \varphi\\ |\sphericalangle X_bAB| &= |\sphericalangle X_bH_bB| = \gamma - \varphi\\ |\sphericalangle X_cAB| &= 180^\circ - (\beta + \varphi + \alpha) = \gamma - \varphi.\end{aligned}$$

Máme tedy $X_a = X_b = X_c$ a úloha je vyřešena.

Příklad. (Zlé proroctví) Merlinovi se zdál prorocký sen o tom, ve kterých letech na svět udeří ohromné katastrofy. Letopočty byly vyjádřeny čísly, která mohou udávat počet nenulových koeficientů polynomu tvaru

$$(ax+b)^{2010} - (cx+d)^{2010}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

O jakých letech se Merlinovi zdálo?

Návod. Na úvod poznamenejme, že člen $(ax+b)^{2010}$ má právě 2011 nenulových koeficientů, pokud jsou a i b nenulové (binomická věta) a právě jeden nenulový koeficient v opačném případě. Nyní rozeberme případ $b = 0 \vee c = 0$. Rozlišíme dvě možnosti podle toho, zda jsou nulová obě čísla či jen jedno. Podle předchozího pozorování nebude však ani v jedné z možností počet nenulových koeficientů v intervalu $[3, 2009]$.

Buď dále $bc \neq 0$. Chceme-li vynulovat koeficient u x^k, musí platit (binomické koeficienty se zkrátí)

$$a^k b^{2010-k} = c^k d^{2010-k} \Leftrightarrow \left(\frac{ad}{bc}\right)^k = \left(\frac{d}{b}\right)^{2010}.$$

Funkce $f(x) = p^x$ je pro $p \neq \pm 1$ prostá, takže vynulovat více než jeden koeficient lze pouze, pokud má předchozí rovnost jeden z tvarů

(i) $1^k = 1$: Pak by se vynulovaly všechny koeficenty.
(ii) $(-1)^k = 1$: Pak by se vynulovaly koeficienty u sudých mocnin, kterých je 1006.

Jako Merlinova čísla tedy připadají v úvahu pouze $0, 1, 2, 1005, 2010, 2011$, kterých všech umíme dosáhnout pomocí následujících polynomů

$$0,\ x^{2010},\ x^{2010} - 1,\ (x+1)^{2010} - (x-1)^{2010},\ (x+1)^{2010} - x^{2010},\ (x+1)^{2010}.$$

Úloha je vyřešena.

Příklad. (Hladomorna) Artuš dostal od Merlina darem magický kvadratický trojčlen $f(x) = x^2 + ax + b$. Pro magický trojčlen platilo, že rovnice $f(f(x)) = 0$ má čtyři reálné kořeny (počítáno včetně násobnosti), přičemž součet nějakých dvou z nich byl roven -1. Artuš ovšem nebyl spokojen s tím, že $b \leq -1/4$ a zavřel Merlina do kobky, dokud mu nevymyslí trojčlen se stejnými vlastnostmi, který by měl $b > -1/4$. Jak dlouho stráví Merlin v kobce?

Návod. Rovnice $f(x) = 0$ jistě musí mít dva reálné kořeny, označme je x_1, x_2. Rozmyslíme si, že rovnice $f(f(x)) = 0$ bude mít čtyři kořeny, právě když jsou x_1, x_2 zároveň v oboru hodnot f. Ten určíme pomocí běžných středoškolských metod $H_f = [C, \infty]$, kde $C = -\frac{a^2}{4} + b$. Máme tedy $x_1 \geq C$ a zároveň $x_2 \geq C$, jejichž sečtením (pamatujte, že $x_1 + x_2 = -a$ získáme důležitý vztah

$$-a \geq -\frac{a^2}{2} + 2b \quad \Leftrightarrow \quad 4b \leq a^2 - 2a \qquad (\heartsuit).$$

Nyní označme y_1, y_2 kořeny rovnice $x^2 + ax + b - x_1 = 0$ a podobně y_3, y_4 kořeny rovnice $x^2 + ax + b - x_2 = 0$. Díky symetrii stačí rozlišit dva případy.

(i) $y_1 + y_2 = -1$: Pak podle Vietových vztahů $a = 1$ a podle $(\heartsuit)$ máme $b \leq -1/4$.
(ii) $y_1 + y_3 = -1$: Tyto kořeny dosadíme do rovnic, které splňují a získáme

$$\begin{aligned} y_1^2 + ay_1 + b - x_1 &= 0,\\ y_3^2 + ay_3 + b - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Sečtením a s využitím Vietových vztahů získáme

$$y_1^2 + y_3^2 + 2b = 0.$$

Nyní už jen stačí udělat správný odhad a psát

$$-2b = y_1^2 + y_3^2 \geq \frac{(y_1 + y_3)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

V obou případech je tedy $b \leq -1/4$ a Merlin tak bude v kobce pěkně dlouho!