

# Incontro matematico

## Antico città 2009

**Příklad.** (Sicario arrivare!) Ukažte, že existuje alespoň 10 000 deseticiferných násobků sedmi pro něž platí, že každý z nich získáme z prvního pouze permutací číslic.

**Příklad.** (È assassinio!) Určete, pro která  $n$  má soustava rovnic

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + 50 &= 12x_1 + 16x_2 \\x_2^2 + x_3^2 + 50 &= 12x_2 + 16x_3 \\&\vdots \\x_n^2 + x_1^2 + 50 &= 12x_n + 16x_1\end{aligned}$$

řešení v oboru celých čísel.

**Příklad.** (Sangue!) Je dán lichoběžník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Na přímce  $BC$  (ovšem mimo úsečku  $BC$ ) nalezneme bod  $E$  a na úsečce  $AD$  nalezneme bod  $F$  tak, aby platilo  $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CBF|$ . Dále buď  $I$  průsečík  $CD$  a  $EF$  a  $J$  průsečík  $AB$  a  $EF$ . Konečně buď  $K$  střed úsečky  $EF$ . Ukažte, že čtyřúhelník  $ABKI$  je tětivový právě tehdy, když je tětivový čtyřúhelník  $JDKC$ .

**Příklad.** (Bruciare cadavere!) Buďte  $a, b, c, d$  přirozená čísla splňující  $ab = cd$ . Dokažte, že platí

$$nsd(a, c) \cdot nsd(a, d) = nsd(a, b, c, d).$$

**Příklad.** (Compagno folla eseguire!) Fotbalového turnaje se zúčastnilo  $2n+1$  týmů a hrálo se systémem každý s každým. Trojici týmů nazveme *vyrovnanou*, pokud žádný tým z této trojice neporazil zbylé dva. Určete minimální a maximální počet vyrovnaných trojic.

**Příklad.** (Pesce a posto!) Čtyřúhelník  $ABCD$  má obsah 2 a platí

$$|AB| + |BD| + |CD| = 4.$$

Určete  $|AC|$ .