Velký pirátský PŘÍBOJ

Oldřichov 2009

Příklad 1. Nad úhlopříčkou AC rovnoběžníku $ABCD$ je sestrojena kružnice k (AC je tedy její průměr). Označme p přímku kolmou na AC vedenou bodem C. Dále X a Y jsou druhé průsečíky přímek AB a AD s přímkou p. Nakonec označme P a Q průsečíky k a přímky BD. Dokažte, že body X, Y, P a Q leží na jedné společné kružnici.

Příklad 2. Je dána posloupnost přirozených čísel taková, že

$$0 \leq a_k \leq k-1 \qquad \text{a} \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{k}$$

pro všechna $k > 1$. Dokažte, že tato posloupnost je od nějakého členu konstantní. Například, bude-li $a_1 = 9$, pak máme posloupnost $9, 1, 2, 0, 3, 3, 3, \ldots$.

Příklad 3. Dva hráči hrají hru. Postupně pokládají na do tabulky 4224×4224 žetony (oba hráči stejné). Vyhraje ten, po jehož tahu se budou některé čtyři žetony v tabulce tvořit vrcholy rovnoramenného lichoběžníku, který není obdelník a jehož rovnoběžné protilehlé strany jsou rovnoběžné se svislým nebo vodorovným směrem. Který z těchto hráčů má výherní strategii a jakou?

Příklad 4. Buďte a, b, c kladná reálná čísla, pro která platí $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažte

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Příklad 5. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$|5^{4m+3} - n^2|$$

víte-li, že m a n jsou přirozená čísla nebo nula.

Příklad 6. Mějme tabulku $(2n+1) \times (2n+1)$ vyplněnou čísly z intervalu $[-1, 1]$ takovou, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je nulový. Jaký je největší možný součet všech $(2n+1)^2$ čísel?