Matice ze všech stran

MARTIN „E.T.“ SÝKORA

ABSTRAKT. Příspěvek shrnuje nejzákladnější pojmy spojené s maticemi – maticové operace, determinant, vlastní čísla a vektory – a propojuje je do jednoho celku.

O maticích toho bylo napsáno mnoho a mnoho toho ještě napsáno bude. Tento příspěvek ani přednáška nemají za cíl pouštět se do pokročilé práce s maticemi, ale zavést nejzákladnější pojmy a co nejelementárněji, ale přesto přesně, odhalit jejich souvislosti. Řekneme si také, k čemu matice jsou, proč se s nimi počítá, proč některé zdánlivě krásné postupy v reálném výpočtu téměř nikdo nepoužívá a jak se ve zjednodušené praxi opravdu postupuje.

Definice. Reálnou (resp. komplexní) *maticí* A *typu* $m \times n$ rozumíme tabulku o m řádcích a n sloupcích, jejíž políčka obsahují reálná (resp. komplexní) čísla. Těmto políčkům říkáme prvky matice A a prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme a_{ij}.

Matice můžeme sčítat a násobit podle následujících pravidel:

Definice. (Sčítání matic) Mějme matice A a B typu $m \times n$ nad stejným tělesem. Pak jejich součtem je matice C typu $m \times n$ nad stejným tělesem, pro kterou platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Pro lepší pochopení násobení matic, které je o něco složitější, si nejprve zadefinujeme pár základních pojmů o tzv. *vektorech*.

Definice. Mějme vektory (tak říkáme maticím typu $1 \times n$, resp. $n \times 1$) $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Pak číslo $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ nazýváme *skalární součin vektorů* u a v.

Cvičení. Dokažte, že vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$ jsou kolmé, právě když $u \cdot v = 0$.

Definice. Mějme vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pak řekneme, že vektor u je *lineární kombinací* těchto vektorů s koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$, když $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ pro nějaká reálná čísla a_i.

Nyní se můžeme pustit do definice násobení matic.

Definice. (Násobení matic) Mějme matici A typu $m \times n$ nad tělesem T a matici B typu $n \times l$ nad stejným tělesem. Pak součinem matic AB rozumíme matici C typu $m \times\ l$, kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Prvek součinu matic na pozici i, j je tedy skalární součin i-tého řádku první matice a j-tého sloupce druhé matice.

Na násobení matic existují další dva ekvivalentní pohledy. Jednak i-tý sloupec součinu dvou matic je lineární kombinací sloupců první matice s koeficienty z i-tého sloupce druhé matice. Podobně je j-tý řádek součinu lineární kombinací řádků druhé matice s koeficienty v j-tém řádku matice první.

Jaká definice je pro „nejvýhodnější“ přitom záleží na problému, který řešíme. Za pomoci první (tzv. *prvkové*) definice lze poměrně snadno dokázat, že sčítání i násobení matic jsou asociativní (tzn. $(AB)C = A(BC)$). Naproti tomu násobení matic není komutativní (tzn. záleží na pořadí činitelů).

Cvičení. Najděte dvě reálné matice řádu 2×2, které spolu nekomutují. Najděte naopak matici, která komutuje se všemi maticemi stejného řádu.

A k čemu to je?

Definovali jsme si podivné tabulky s čísly, ale zatím jsme si vůbec neřekli, k čemu mohou být dobré. Tak to tedy zkusme napravit. Mějme nějakou soustavu lineárních algebraických rovnic. Tu typicky řešíme tak, že rovnice násobíme vhodnými čísly a navzájem sčítáme a odčítáme. Někdy je ale poměrně složité vyznat se ve všech těch výrazech, které mohou být dlouhé a složité. Lze se tedy dohodnout na následujícím zjednodušení notace: ze soustavy vypustíme názvy neznámých (tj. nebudeme psát $x, y, z, \dots$). Místo toho se domluvíme, že koeficienty náležející jedné proměnné budeme psát vždy pod sebe do jednoho sloupečku. Dále nebudeme psát „+“ mezi výrazy, bude stačit mezera, a místo rovnítek nakreslíme svislou čáru. Celé schéma pak uzávorkujeme, čímž získáme matici, která reprezentuje danou soustavu rovnic.

Příklad. Soustava

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4, \\ 2x + y &= -1, \\ -x + 2z &= 0, \end{aligned}$$

lze reprezentovat maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

S touto maticí můžeme dělat stejné úpravy jako se soustavou rovnic – prohazovat řádky, násobit řádky číslem a sčítat/odčítat řádky od sebe.[1]

Cvičení. Zamyslete se, že z elementárních řádkových úprav lze složit algoritmus, který soustavu vyřeší.

[1] Těmto úpravám říkáme elementární řádkové úpravy.

Připomeňme, že n-složkový vektor můžeme považovat za matici typu $m \times 1$, tedy se můžeme na matici typu $n \times m$ dívat jako na zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, které vektoru v přiřadí vektor Av, kde násobení chápeme maticově. Příklad výše pak lze přeformulovat jako hledání řešení rovnice $Av = b$, kde A je matice koeficientů levých stran, vektor b je vektor pravých stran a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ je vektor neznámých.

Jak řešit tyto rovnice je sice známo, ale přesný výpočet je poměrně složitý a kvůli (například) zaokrouhlovacím chybám (viz další cvičení) je pro větší počet rovnic a proměnných na počítači téměř nerealizovatelný. Způsoby jak tento problém obejít se zabývá numerická matematika.

Cvičení. Řešte maticovou soustavu $Av = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 5 \\ -0,2 & -11 \end{pmatrix}$$

a $b = (2, 2)$. Následně řešte obdobnou rovnici s levou stranou

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 5 \\ -0,3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Porovnejte získaná řešení. Lze usuzovat, že malé změny v zadání, resp. malé zaokrouhlovací chyby v průběhu výpočtu garantují přesné řešení?

Ukázali jsme si, jak matice reprezentuje nějaké *lineární zobrazení* (tzn. splňující $f(u + v) = f(u) + f(v)$ a $f(tu) = tf(u)$ pro číslo t a vektory u a v). Funguje to ale i naopak – ke každému lineárnímu zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ náleží matice A typu $n \times m$, že pro všechny $v \in \mathbb{R}^m$ platí $f(v) = Av$. Matice nám tedy dávají do ruky nástroj umožňující zacházet s geometrickými objekty pomocí čísel, což je například pro počítač výrazně stravitelnější.

Cvičení. Nalezněte matice těchto lineárních zobrazení: identické zobrazení, osová souměrnost, středová souměrnost, stejnolehlost. Na co se při nich zobrazí čtverec s vrcholy $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$?

Cvičení. Nalezněte geometrický význam lineárního zobrazení určeného maticí

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Cvičení. (Záludné na pochopení maticového násobení) Mějme výraz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Když uzávorkujeme druhou a třetí matici jako první k vynásobení, pak součin nelze provést. Když ale uzávorkujeme první dvě a druhé dvě matice zvlášť, tak z první závorky vznikne číslo, z druhé matice typu 3×3, a ty vynásobit lze. Tím jsme dostali spor s asociativitou maticového násobení. V čem je zakopaný pes?

Determinanty

Dále se zaměříme jen na čtvercové matice řádu N, tedy matice s N řádky i sloupci. Pro tyto matice se definuje tzv. *determinant*. Na opravdu pořádné zadefinování není v přednášce prostor, my si ale vystačíme se stále celkem pořádným:

Definice. *Determinant* čtvercové matice A (značíme $\det(A)$) je číslo definované následujícím rekurzivním způsobem:

(1) Determinantem matice řádu 1 je její jediný prvek.
(2) Pro matici A řádu N, kde $N \geq 2$ definujeme

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i,1}),$$

kde $A^{i,j}$ je matice vzniklá z A vynecháním i-tého sloupce a j-tého řádku.

Příklad. Spočtěte determinant matic řádu dva a tři.

Poznámka. Determinant má navzdory své složité definici některé velmi praktické vlastnosti a dokonce i geometrickou interpretaci. Mějme v $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^3$) dva (resp. tři) vektory. Pak pro matici A řádu řádu dva (resp. tři) dává $|\det(A)|$ podíl obsahů (resp. objemů) rovnoběžníků (resp. rovnoběžnostěnů) určených danými vektory po a před provedením zobrazení určeného maticí A.

Příklad. Spočtěte determinant matice, která má mimo hlavní diagonálu samé nuly, resp. obecněji té, která má nuly pod hlavní diagonálou.[2]

Příklad. Spočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cvičení. Rozmyslete si, jaký vliv mají elementární řádkové úpravy na determinant.

Cvičení. Co umíte říct o determinantu matice A, pro kterou existuje nenulové řešení rovnice $Av = 0$?

[2] Takovým maticím říkáme diagonální, resp. horní trojúhelníková.

Vlastní čísla a vektory

Díváme-li se na matici jako na příslušné lineární zobrazení, které nějak deformuje původní prostor, jsou zajímavé a význačné ty směry, které naše zobrazení zachovává, tedy vektor takového směru se zobrazí na svůj násobek a neotočí se někam pryč.

Definice. Číslo λ nazveme *vlastním číslem* matice A, pokud existuje nenulový vektor v takový, že $Av = \lambda v$. Každému takovému vektoru řekneme *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ.

Označíme-li I jednotkovou matici, tedy matici diagonální s jedničkami na hlavní diagonále, pak můžeme podmínku rovnou z definice determinantu přepsat jako

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ Av &= \lambda I v, \\ (A - \lambda I)v &= 0. \end{aligned}$$

Hledáme tedy nenulové řešení maticové rovnice s nulovou pravou stranou. Jak jsme si rozmysleli v posledním cvičení, to je ekvivalentní rovnosti $\det(A - \lambda I) = 0$.

Cvičení. Rozmyslete si, že hledání vlastního čísla je vlastně hledání kořenů polynomu stupně N, kde N je řád matice A.

Cvičení. Ukažte, že reálná matice řádu 3×3 má alespoň jedno vlastní číslo.

Příklad. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hledání takových kořenů je ale obtížné a pro $N \geq 5$ dokonce v obecném případě nemožné, protože pro některé rovnice pátého a vyššího stupně nelze přesně najít jejich řešení.

Pokud tedy hledáme vlastní čísla či vektory (a spokojíme-li se s ne úplně přesným výsledkem), je vhodné použít jiný postup.

Pro jednoduchost předpokládejme, že existují (jednotkové) vlastní vektory $v_1, v_2, \ldots, v_N$ příslušející po řadě vlastním číslům $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_N|$, kde λ_1 je v absolutní hodnotě ostře největší. Navíc předpokládejme, že každý vektor $v \in \mathbb{R}^N$ lze jednoznačně zapsat jako $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_Nv_N$. Pak lze ukázat, že se posloupnost

$$u_0 = v, u_1 = \frac{Av}{\lambda_1}, \ldots, u_n = \frac{A^n v}{\lambda_1^n}, \ldots$$

blíží (neboli *konverguje k*) k vektoru b_1v_1 pro každý vektor v, pro který $v_1 \neq 0$. Navíc posloupnost

$$u_0 \cdot Au_0, u_1 \cdot Au_1, \ldots, u_n \cdot Au_n, \ldots,$$

kde tečka značí skalární součin, konverguje k $b_1^2\lambda_1$.

Tento postup má dva háčky. Zaprvé sice víme, že posloupnosti konvergují k vlastnímu číslu a vektoru, ale nevíme jak rychle. Jinak řečeno, nevíme, kolik kroků posloupnosti musíme udělat, abychom se rozumně přiblížili hledaným hodnotám. Pokud se ale vlastní čísla liší výrazně, kroků není třeba moc.

Zadruhé má tento postup poměrně silné předpoklady. Asi nejtajemnější z nich je ten poslední, který říká, že vlastní vektory tvoří tzv. *bázi*. Pro symetrické matice to ale je splněno a třeba ve fyzikálních úlohách často figurují symetrické matice, takže tento předpoklad není až tak moc omezující.

Literatura a zdroje

[1] Helča Svobodová: *Matice* 2×2, Uhelná Příbram, 2014.