Matice

Káťa Fišerová

Definice. Maticí A *typu* $m \times n$ *nad množinou* M *budeme rozumět každé obdélníkové schéma*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in M$.

Uvažujme matice nad stejným komutativním okruhem R (např. nad $\mathbb{Z}$).

Definice. (Sčítání matic) *Nechť* $A = (a_{ij})$ *a* $B = (b_{ij})$ *jsou matice typu* $m \times n$. Součtem *těchto dvou matic budeme rozumět matici* $C = (c_{ij})$ *typu* $m \times n$, *kde* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pro* $i = 1, 2, 3, \dots, m$ *a* $j = 1, 2, 3, \dots, n$. *Sčítání matic nad komutativním okruhem je komutativní, asociativní, ke každému typu existuje nulová matice a tedy existují matice opačné.*

Definice. (Násobení matic) *Nechť* $A = (a_{ij})$ *je matice typu* $p \times r$ *a* $B = (b_{jk})$ *je matice typu* $r \times s$ *nad okruhem* R. Součinem matic A, B *(v tomto pořadí) budeme rozumět matici* $C = (c_{ik})$ *typu* $p \times s$, *kde* $c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_{jk}$ *pro* $i = 1, 2, \dots, p$ *a* $k = 1, 2, \dots, s$. *(Prvek* c_{ik} *je skalárním součinem* i*-tého řádku matice* A *a* k*-tého sloupce matice* B*.) Násobení matic není komutativní, ale je asociativní.*

Definice. (Násobení skalárem) *Mějme* $a_{ij} \in R^{m \times n}$ *a* $c \in R$. *Potom* $cA = (ca_{ij})$.

Tvrzení. Pro skaláry c, d a matice A, B vhodného typu platí:

$$\begin{aligned} (c + d)A &= cA + dA \\ c(A + B) &= cA + cB \\ (cd)A &= c(dA) \\ c(AB) &= (cA)B = A(cB) \end{aligned}$$

Definice. (Transponování matic) Transponovanou maticí A^T *budeme nazývat matici* A *„převrácenou podle diagonály":*

$$A = (a_{ij}) \;\; typu \;\; p \times q \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji}) \;\; typu \;\; q \times p.$$

Pozorování. Pro matice A typu $p \times q$ a B typu $q \times s$ platí: $\underbrace{(AB)^T}_{p \times s} = \underbrace{B^T A^T}_{s \times p}$

Okruh $R^{n\times n}$ (čtvercové matice nad okruhem R)

Protože R má jednotkový prvek, má $R^{n\times n}$ jednotkový prvek:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n.}$$

Existují netriviální dělitele „nuly“, např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matice $A \in R^{n\times n}$ se nazývá invertibilní, existuje-li matice A^{-1} taková, že platí $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E_n$. Jsou-li A, B invertibilní, potom je rovněž matice $A\cdot B$ invertibilní a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definice. (Speciální čtvercové matice)

(i) *skalární* $a\cdot E$ *(kde* $a \in R$*)*
(ii) *diagonální*
(iii) *horní trojúhelníková*
(iv) *dolní trojúhelníková*
(v) *symetrická* $a_{ij} = a_{ji}$ $\quad (A = A^T)$
(vi) *antisymetrická* $a_{ij} = -a_{ji}$ $\quad (A = -A^T)$
(vii) *Hermitovské (nad* $\mathbb{C}$*)* $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\quad (A^T = \overline{A})$

Definice. Hodnost matice *je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Označení:* $r(A)$.

Poznámka. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když rovnice $\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{n} v_i$ má pouze triviální řešení, tedy když $v_i \equiv 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když můžeme jeden z nich zapsat jako netriviální lineární kombinaci ostatních.

Pozorování. Hodnost matice se nezmění

(i) zaměníme-li pořadí dvou řádků
(ii) násobíme-li každý prvek libovolného řádku nějakým nenulovým číslem
(iii) přičteme-li c-násobek některého řádku k jinému řádku
(iv) přidáme-li nebo vynecháme-li řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků

Tvrzení. Platí $r(A) = r(A^T)$, tedy nezáleží na tom, zda počítáme lineárně nezávislé řádky, nebo sloupce.

Hodnost matice určujeme převedením na odstupňovaný tvar (v něm se počet lineárně nezávislých řádků matice rovná počtu nenulových řádků matice) nebo přímo na diagonální tvar (v něm se počet lineárně nezávislých řádků matice rovná počtu nenulových prvků na hlavní diagonále).

Soustava n lineárních rovnic o m neznámých nad tělesem T

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

kde $a_{ij}, b_i, x_1, x_2, \dots, x_n \in T$.

Úkolem je najít všechny m-tice $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T^m$, pro které platí výše zapsaná SLR.

Definice. (Typy SLR)

(i) homogenní SLR: $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$

(ii) nehomogenní SLR: *aspoň jedno b_i není rovno nule.*

Definice. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice soustavy. Pak*

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

je rozšířená matice soustavy.

SLR lze také zapsat ve tvarech:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$$

Věta. *Nechť A je matice typu $n \times m$ nad T a $\mathbf{b} \in T^n$. Soustava $A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ je řešitelná právě tehdy, když je sloupec pravých stran lineární kombinací sloupců matice soustavy, tj. $r(A) = r(A|\mathbf{b})$.*

Jestliže je soustava $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná, potom má množina všech jejích řešení tvar $\mathbf{c}+W$, kde $\mathbf{c} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je libovolně zvolené řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$

a W je podprostor všech řešení příslušné homogenní soustavy $A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$. Dále je $\dim W = m - r(A)$.

Je-li $r(A|b) = r(A) = n$, má soustava právě jedno řešení.

Definice. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad komutativním okruhem R (nad tělesem T).* Determinantem *matice A nazveme prvek:*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Determinant je součet $n!$ sčítanců tvaru $\operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$; každý sčítanec je součinem n prvků matice A, přičemž z každého řádku a každého sloupce je vzat právě jeden prvek, a tento součin je opatřen znaménkem příslušné permutace ($\operatorname{sgn} \pi = \pm 1$).

Množina permutací S_3 pro determinant matic třetího řádu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = 1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = -1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = -1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = 1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = 1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\pi = -1}$$

Tvrzení. (Sarrusovo pravidlo)

$$\det A_{3,3} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Motivace. (K čemu by mohly být determinanty dobré) Zkusme upravovat soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad / \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad / \cdot (-a_{12}) \end{aligned}$$

Po sečtení dostaneme $a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{11}$, z čehož máme:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Tedy:

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

Tvrzení. (Cramerovo pravidlo) Nechť A je regulární matice řádu n nad tělesem T. Jediné řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b} \in T^n$ je libovolně zvoleno) má tvar: $x_1 = \frac{A_1}{A}, x_2 = \frac{A_2}{A}, \ldots, x_n = \frac{A_n}{A}$, kde matice A_i vznikne z matice A záměnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Základní vlastnosti determinantů

Nechť A je matice řádu n nad komutativním okruhem R.

(i) Je-li některý sloupec matice A nulový, je $\det A = 0$.
(ii) Je-li A horní (dolní) trojúhelníková, je $\det A$ roven součinu prvků na hlavní diagonále.
(iii) $\det A^T = \det A$.
(iv) Vynásobíme-li některý sloupec (řádek) matice A prvkem $c \in R$, pak je determinant vzniklé matice B roven $\det B = c \cdot \det A$.
(v) Má-li matice A dva stejné sloupce (řádky), je $\det A = 0$.
(vi) Přičteme-li k nějakému řádku (sloupci) matice A c-násobek jiného řádku (sloupce), pak je determinant vzniklé matice roven $\det A$.
(vii) Přehodíme-li dva sloupce (řádky) matice, změní determinant znaménko.

Věta. (O rozvoji determinantu) *Nechť A je matice řádu n nad komutativním okruhem R. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{ji} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého sloupce)},$$

kde A_{ij} je submatice matice A, která z ní vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámka. Člen $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.