Matice 2×2

Helča Svobodová

Abstrakt. Přednáška má za cíl seznámení s operacemi a základními vlastnostmi reálných matic 2×2. Dále pojednává o lineárních zobrazeních a v závěru o souvislosti matic s komplexními čísly.

Matice a maticové operace

Číselnou maticí rozumíme tabulku čísel, kterým se říká *prvky matice*. Na přednášce se budeme věnovat *reálným čtvercovým maticím řádu* 2, tedy maticím o dvou sloupcích a dvou řádcích, jejichž prvky jsou reálná čísla. Příležitostně budeme matice označovat velkými tiskacími písmeny $A, B, \ldots$

Pro dvě matice platí

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když platí zároveň $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ a $d_1 = d_2$.

Matice sčítáme přirozeným způsobem:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix},$$

odčítání funguje analogicky. Odečtením dvou stejných matic dostaneme *nulovou matici*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici lze násobit libovolným reálným číslem α:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}.$$

Takto je definováno násobení matice a vektoru:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Součin dvou matic je definován následovně:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Příklad 1. Nalezněte *identickou matici* I – takovou, která přenásobením nezmění původní matici. Liší se identická matice při násobení zleva a zprava?

Příklad 2. Je maticové násobení obecně komutativní? (Tedy platí pro každé dvě matice A, B, že $AB = BA$?)

Tvrzení. *Maticové násobení je asociativní. (Tedy pro každé tři matice A, B, C platí $A(BC) = (AB)C$.)*

Příklad 3. Dokážete najít dvě nenulové matice takové, že jejich součinem je matice nulová?

Příklad 4. Nalezněte tvar *inverzní matice* k obecné matici A, tedy matici A^{-1} takovou, že $AA^{-1} = I$. Existuje inverzní matice ke každé matici?

Definice. Číslo $ad - bc$ nazýváme *determinantem* matice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Značíme ho $\det A$.

Příklad 5. Jak vypadá determinant matice inverzní k $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$? Jaký je součin determinantů původní a inverzní matice?

Příklad 6. Dokažte, že pro libovolné dvě matice A, B platí $\det(AB) = \det A \det B$.

Lineární zobrazení v rovině

Jak vypadají lineární zobrazení, si ukážeme na přednášce.

Tvrzení. *Pro každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existuje matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ taková, že pro každý vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ platí*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. Nalezněte matice těchto lineárních zobrazení: identické zobrazení, osová souměrnost, středová souměrnost, stejnolehlost. Na co se při nich zobrazí čtverec s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$?

Příklad 8. Nalezněte matici lineárního zobrazení, které promítá vektor na osu x.

Příklad 9. Nalezněte geometrický význam lineárního zobrazení určeného maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tvrzení. *Obraz libovolného útvaru v rovině s obsahem S při zobrazení daném maticí $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ má obsah $|ad - bc|\, S$.*

Zdroje

[1] *http://www.wikipedia.org*