Matematika v praxi

Michal Hroch

Cílem této přednášky je nastínit alespoň základní metody hledání přibližného řešení nelineárních rovnic jedné proměnné. Budeme řešit rovnici $f(x) = 0$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ za předpokladu spojitosti funkce f a podmínky $f(a)f(b) < 0$ (tzn. hodnoty v krajnich bodech intervalu maji opačná znaménka, tudíž řešení existuje). Ukážeme si metodu bisekce (půlení intervalu), metodu regula falsi a její modifikaci a zmíním se o metodě Newtonově (tečen). Ukážeme si, jak lze tyto metody reprezentovat v počítači pomocí programu Maple.

Algoritmus. (metoda bisekce) Dáno a, b tak, že $f(a)f(b) < 0$, a dána přesnost $\epsilon > 0$. Dále $a_0 = a$, $b_0 = b$. Pro $n = 0, 1, \ldots$ opakuj:

- $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Je-li $f(a_n)f(x_n) \leq 0$, pak $b_{n+1} = x_n$, $a_{n+1} = a_n$, jinak $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- Výpočet provádíme, dokud nenastane $|f(x_n)| < \epsilon$.

Věta. *Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a)f(b) < 0$. Nechť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, kterou dostaneme metodou bisekce. Pak tato posloupnost konverguje k α, kde $f(\alpha) = 0$.*

Algoritmus. (metoda regula falsi) Dáno a, b tak, že $f(a)f(b) < 0$, a dána přesnost $\epsilon > 0$. Dále $a_0 = a$, $b_0 = b$. Pro $n = 0, 1, \ldots$ opakuj:

- $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
- Je-li $f(x_n)f(a_n) \leq 0$, pak $b_{n+1} = x_n$, $a_{n+1} = a_n$, jinak $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$.
- Výpočet provádíme, dokud nenastane $|f(x_n)| < \epsilon$.

Věta. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $f(a)f(b) < 0$. Potom posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, kterou dostaneme užitím metody regula falsi, konverguje k α, kde $f(\alpha) = 0$.*

Algoritmus. (modifikovaná regula falsi) Dáno a, b tak, že $f(a)f(b) < 0$, a dána přesnost $\epsilon > 0$. Dále $a_0 = a$, $F = f(a_0)$, $b_0 = b$, $G = f(b_0)$. Pro $n = 0, 1, \ldots$ opakuj:

- $x_n = \frac{Ga_n - Fb_n}{G - F}$
- Je-li $f(x_n)f(a_n) \leq 0$, pak $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$, $G = f(x_n)$. Je-li navíc $f(x_n)f(x_{n-1}) > 0$, pak $F = \frac{F}{2}$. Pro $f(x_n)f(a_n) > 0$ buď $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$, $F = f(x_n)$. Je-li navíc $f(x_n)f(x_{n-1}) > 0$, pak $G = \frac{G}{2}$.
- Výpočet provádíme, dokud nenastane $|f(x_n)| < \epsilon$.