Matematika v Mezopotámii

Bára Kociánová

Abstrakt. Jak vypadala matematika psaná na hliněné destičky před více než třemi tisíci lety? Naučíme se číst klínová čísla, budeme počítat v šedesátkové soustavě a vyřešíme si příklady, nad kterými dost možná dumali mezopotámští školáci.

Útržky z historie

Název Mezopotámie označuje území mezi dvěma řekami, Eufratem a Tigridem, nezávisle na tom, kdo tamním obyvatelům zrovna vládl. Říší se tam vystřídalo několik, kvůli v okolí výjimečné úrodnosti území se o něj totiž často bojovalo. Pro jednoduchost však v tomto textu nebudeme rozlišovat Asyřany, Sumery ani další civilizace a budeme je označovat jen jako Mezopotámce.

Nejstarší nálezy dokládající trvalé osídlení pocházejí z desátého tisíciletí před naším letopočtem. O šest tisíc let později už lidé začali vytvářet města, což je časem donutilo vymyslet písmo a naučit se počítat.

K velké radosti historiků byla nejdostupnějším materiálem hlína, do které se dalo snadno rýpat. Klínové písmo na vysušených (či vypálených, byl-li text obzvlášť důležitý) hliněných destičkách je totiž čitelné dodnes. Na rozdíl od papyru či papíru se tabulky nerozloží a oheň spíš pomůže jejich zachování, než aby je zničil. Jen červi občas kus textu smazali a často je nutné tabulky poslepovat. Jsou také méně skladné, nicméně tehdejší písaři rozhodně neplýtvali místem – jeden řádek měl na výšku sotva dva milimetry. Tabulku o velikosti dnešní A4 bychom přepsali na asi 830 řádků.

Celkem se hliněných tabulek našlo na půl milionu, z toho se ví o dvou tisících matematických, pocházejících především z období 1900 – 1600 př. n. l. Tehdy nastalo dlouhé období míru, které svědčilo rozvoji vědy.

Mnoho tabulek sloužilo jako kalkulačky, obsahují třeba násobilku nebo seznam druhých mocnin. Jiné zobrazují geometrické problémy, většinou však jen obrázek a čísla, nikoli vysvětlující text, natož důkaz. Těžko ale říct, kolik tabulek s matematikou se nalezlo doopravdy, protože většinu ještě nikdo z historiků nečetl. Možná se časem zjistí, že byli Mezopotámci o mnoho chytřejší, než tušíme dnes.

Počítání v šedesátkové soustavě

Definice. *Poziční číselná soustava o základu n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$* je způsob zápisu čísel pomocí násobků mocnin čísla n. Pro $S \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ se zápis $\overline{a_S a_{S-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots}$ rovná $a_S \cdot n^S + a_{S-1} \cdot n^{S-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 + a_{-1} \cdot n^{-1} + a_{-2} \cdot n^{-2} \dots$

Takovou definici by mezopotámští matematici nejspíš nenapsali, nicméně používali poziční šedesátkovou soustavu a uměli v ní počítat stejně dobře jako my v desítkové. Tedy – skoro. Podobně jako ostatní starověké civilizace neznali záporná čísla ani nulu, a tak například samotný znak $\vee$ (jedna) mohl znamenat kteroukoli mocninu šedesáti. Význam se číslu přisuzoval podle kontextu, což ale stejně muselo působit zmatky. Časem se někteří matematici naučili místo nuly vynechávat kousek volného místa (a ještě později používali dvě šikmé čáry \\), nicméně nikdy ne na konci čísla.

Další zvláštností je, že nad dělením uvažovali jako nad násobením příslušným inverzem. Inverz k a v šedesátkové soustavě je takové číslo b, že $a \cdot b = 60$. Například místo dělení dvanácti můžeme násobit pěti, což bývá jednodušší a díky nepoužívání nuly na konci se oba výsledky rovnají: $120/12 = \overline{2}/\overline{12} = \overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{10}$. Výhodou šedesáti je, že má hned dvanáct dělitelů. Naopak třeba číslo sedm inverz nemá, a kdybychom chtěli napsat jednu sedminu jako součet zlomků se jmenovatelem mocniny šedesáti, psali bychom donekonečna. Podobně jako kdybychom chtěli napsat jednu třetinu jako součet desetinných zlomků.

Ve starověku pojem nekonečna nechápali, nicméně na jedné z tabulek lze nalézt pravdivé vztahy, které se přepíšou jako: $\frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{16}{60^3} + \frac{59}{60^4} \leq \frac{1}{7} \leq \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{18}{60^3}$.

Číslo napsané arabskými číslicemi v šedesátkové soustavě budeme psát s horním pruhem a tečkou mezi indexy a_i, např. $\overline{3.15} = 3 \cdot 60 + 15 = 195$. Klínové písmo budeme napodobovat následovně: $\vee$ značí jedničku, $\prec$ desítku. Tyto znaky budeme psát za sebe, sčítají se přirozeným způsobem, např. $\vee\vee \prec\prec\prec \vee\vee\vee\vee\vee = \overline{2.35}$.

Příklad 1. Převeďte mezi šedesátkovou a desítkovou soustavou:

(1) $2543 =$
(2) $\frac{7}{15} =$
(3) $1200{,}4 =$
(4) $\frac{1}{8} =$
(5) $\overline{1.1.1} =$
(6) $\overline{10.5.30} =$
(7) $\overline{2.48} =$

Příklad 2. Spočtěte a výsledek napište v šedesátkové i desítkové soustavě:

(1) $\overline{2.5} \cdot \overline{4.8} =$
(2) $\overline{5.40.45} \cdot \overline{3} =$
(3) $\overline{8.45} \cdot \overline{7.20} =$
(4) $\overline{20.40.50} : \overline{2} =$
(5) $\overline{2.4.5} : \overline{10} =$

(6) $\overline{7.30} : \overline{15} =$

Začátky geometrie

Mnoho nalezených hliněných tabulek dokazuje, že v Mezopotámii se lidé neomezovali na snadné počty, ale řešili i problémy, které s každodenním životem neměly nic společného. Ač nedělali důkazy a geometrické konstrukce zkoumali jen pro konkrétně velké útvary, občas došli k zajímavým výsledkům. Vyřešíme si několik příkladů a porovnáme naše řešení s obrázky a čísly na tabulkách.

Příklad 3. Mějme dva soustředné rovnostranné trojúhelníky, větší o straně p, menší o straně q. Prodlužme všechny strany malého trojúhelníku tak, aby vznikly tři shodné lichoběžníky. Vyjádřete délky jejich stran pomocí p a q a pro $p = \vee$, $q = \prec$ je napište v šedesátkové soustavě. Nakonec spočítejte poměr obsahů velkého a malého trojúhelníku.

Příklad 4. Vyjádřete obsah S kruhu na základě jeho obvodu o. Pokud $o = \overline{3}$ a $S = \overline{45}$, zjistěte, jakou hodnotu podle Mezopotámců mělo přibližně π.

Oni ale *konstantou kruhu* nazývali číslo $\overline{5}$. Pokud *vylepšená konstanta kruhu* je $\beta = \frac{24}{25}$, jaká je vylepšená přibližná hodnota π?

Úloha 5. Na jedné nalezené tabulce se píše (zhruba):

Povrch a stranu jsem spojil: $\frac{3}{4}$. 1, přebytek,
položíš. Polovinu z 1 uřežeš. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ necháš dát:
$\frac{1}{4}$, k čemuž přilepíš: 1, a tomu 1 se rovná. Ta $\frac{1}{2}$, kterou jsi nechal dát,
z vnitřku 1, vyvodíš: $\frac{1}{2}$ je strana.

Řešení. První věta je zadání příkladu, který bychom dnes napsali jako kvadratickou rovnici $x^2 + x = \frac{3}{4}$. Následuje geometrické řešení.

Sečíst povrch a stranu znamená ke čtverci $x \cdot x$ přidat obdélník $1 \cdot x$. Ten obdélník pak rozřežeme napůl a polovinu z něj nalepíme na čtverec tak, abychom dostali čtverec o straně $x + \frac{1}{2}$ bez rohu o straně $\frac{1}{2}$.

Když necháme dát jednu polovinu a jednu polovinu, získáme čtvrtinu, což je přesně obsah chybějícího rohu. Víme, že když ke čtvrtině přidáme další tři (což je rovno obsahu počátečního obrazce, a tedy i přeskládaného), dostaneme jedna. Jedna rovná se jedné, to nezní příliš užitečně, nicméně si tím uvědomíme, že zadání plus čtvrtina je obsah čtverce jedna krát jedna. Čili $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$. Proto se x musí rovnat jedné polovině.

Toto řešení dnes působí poněkud složitě a nepříliš použitelně pro obecnou kvadratickou rovnici. Neznamená to však, že neuměli řešit jiné rovnice než výše uvedenou. Stačí místo místo obdélníku o straně jedna půlit obdélník o straně b a pak na závěr dostaneme, že obsah čtverce o straně $x + \frac{b}{2}$ se rovná součtu obsahu počátečního obrazce, který byl obecně c, a obsahu čtverce o straně $\frac{b}{2}$. Jen je potřeba umět číslo $c + \frac{b^2}{4}$ umět odmocnit. Pak můžeme vyřešit rovnici $x + bx = c$ pro nezáporná b, c.

Method of false position

Nic jako metoda falešné pozice se v češtině neříká, přestože se jedná o klasický způsob řešení rovnic jedné neznámé, který kromě Mezopotámců používali i třeba egyptští nebo arabští matematici.

Tvrzení 6. *Mějme funkci* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *tvaru* $f(x) = ax$ *pro nějaké* a *kladné reálné číslo. Pak pokud vezmeme* $x_0 > 0$ *libovolné (false position), rovnici* $f(x) = c$ *pro* $c > 0$ *řeší* $x = \frac{c}{f(x_0)} \cdot x_0$*.*

Důkaz. Nakreslete si.

Příklad 7. Vyřešte pomocí této metody rovnici $x + \frac{1}{7}x = 55$. Jaká hodnota x_0 se nám bude hodit? Jednotlivé kroky napište i čísly v šedesátkové soustavě.

Definice 8. *Mana* je váhová jednotka odpovídající 0,5 kg. *Gín* = $\frac{1}{60}$ *mana*. *Še* = $\frac{1}{180}$ *gín*.

Příklad 9. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Přidal jsem k němu jeho sedminu a pak jedenáctinu té sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 10. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Odebral jsem z něj jednu sedminu, pak jednu třináctinu rozdílu. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 11. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. Odebral jsem z něj jednu sedminu, pak jsem přidal jednu jedenáctinu rozdílu, pak jsem odebral jednu třináctinu sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Příklad 12. Našel jsem kámen. Jeho váhu neznám. K osminásobku jeho váhu jsem přidal dva *gín*, pak jsem přidal třetinu sedminy čtyřiadvacetinásobku sumy. Zvážil jsem to: 1 *mana*. Kolik vážil původní kámen?

Literatura a zdroje

[1] Pierre Ageron: kurz *Historie matematiky*, UniCaen, LS 2015/16.