

Jak přicházet na řešení úloh aneb matematika a tenis

Filip Jaroš

- 1) Úloha je jako soupeř v tenisu, nesmíme se ho bát, ale podcenění se hrubě nevyplácí. Ani protihráčova nablýskaná raketa, ani odpuzující zadání by nám nemělo vzít chuť k boji.
- 2) Proklepneme úložku více nástrojů, přes forhendovou stranu nás bude možná drtit, ale bekhend se může ukázat rozhodující slabinou.
- 3) I při špatném průběhu zápasu se na protivníka neustále usmíváme, tím ho zmateme.
- 4) Po prohraném setu je dobré uvolnit tělo a do příštího dějství nastoupit s jasnou hlavou a odhodlanou myslí. Každý set začíná za stavu 0:0.
- 5) Když se nám opravdu nedaří, mrskneme po zadání raketou a odejdeme na pívko. (To se samozřejmě může stát i přednášejícímu.)

A teď soupeři v turnajovém pavouku:

Mechanik

Hráč v rozpuku mládí, narozen 1988. Avšak hraje bez invence, takový mladý starý. Nechtě f je zobrazení množiny $M = \{1, 2, \dots, 1988\}$ do M . Pro libovolné přirozené n položme $f_1 = f(1)$, $f_{n+1} = f(f_n)$. Zjistěte, zda existuje takové m , že $f_{2m} = f_m$.

Rychlík

Tento zápas bude hodně krátký. Na Rychlíka existují hned dvě vítězné taktiky. Dokažte, že pro konvexní čtyřúhelník $ABCD$ o obsahu S platí

$$S \leq \frac{1}{2}(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|),$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Machr

Na začátku ukazuje svaly, ale pár přesných zásahů na síti ho srazí do kolen. Přiřadme každé dvojici přirozených čísel (x, y) reálné číslo $f(x, y) \geq 1$. Dokažte, že pak pro libovolné přirozené číslo k existují přirozená čísla m, n taková, že $m + n \geq k$ a $f(m, n) < f(m + 1, n) + f(m, n + 1)$.

Praktik

Jde o hodně zkušeného hráče. Zdolat ho lze jen trpělivou hrou. Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 3$) jsou reálná čísla, která současně vyhovují nerovnostem $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ a $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2$. Dokažte, že platí $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 2$.

Vztekloun

Řeč je o velmi neoblíbeném hráči. Když se soupeři nedaří, vysmívá se mu, ale jakmile začne prohrávat, odejdou mu nervy a odchází rychle poražen. Necht' je dána funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která je ostře rostoucí a pro každá dvě přirozená čísla m, n splňuje rovnost $f(mn) = f(m)f(n)$. Určete $f(30)$, víte-li, že $f(2) = 4$.

Miláček

Velmi oblíben u diváků. Drží se zásady fair play a když je poražen, soupeři zatleská. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takové, že $f(0) = 1$ a pro každé celé číslo platí $f(f(n)) = n$, $f(f(n+2)+2) = n$.

Hvězda

Dosud nenašel soupeře. Kvůli přílišnému zájmu médií se skrývá, nastupuje až v případech, že všichni jeho přátelé jsou poraženi.