Matematická indukce

Tomášek Roskovec

Abstrakt. Ti, kteří o indukci neslyšeli, o ní uslyší, kdo jí už zná, ten získá jistotu v jejím používání.

V přednášce se budeme zabývat důkazovou technikou, která se používá napříč celou matematikou od jednoduchých součtových vzorců přes kombinatoriku, teorii grafů až k derivačnímu počtu.

Základní myšlenka a jednoduché aplikace

Neformálně řečeno nám princip matematické indukce říká toto: Pokud dokážu udělat první krok a pokud dokážu po libovolném kroku udělat jeden navíc, pak dokážu udělat libovolný počet kroků.

Matematicky řečeno dokazujeme, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla. Budeme tento fakt zapisovat jako $T(n)$, kde T značí nějaký výrok, do kterého dosadíme n přirozené. Bude nám stačit dokázat pouze dvě věci. Nejprve dokážeme $T(1)$, takzvanou bázi, poté musíme dokázat implikaci $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, takzvaný indukční krok.

Pro názornost vyřešíme první příklad. Dokážeme vzorec pro částečný součet geometrické řady. Platí, že

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Nejprve potřebujeme určit, podle jaké proměnné povedeme indukci. V tomto případě jde evidentně o číslo n. První krok dokážeme jednoduše tím, že dosadíme jedničku.

$$a = a\frac{1-q}{1-q} = a$$

Takže rovnost zřejmě platí. Teď potřebujeme dokázat indukční krok, neboli platí-li vzorec pro číslo n, pak platí i pro $n+1$. Takže z rovnosti pro číslo n ekvivalentními úpravami dostaneme rovnost pro n.

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} + aq^{n+1} = a\frac{1-q^n}{1-q} + aq^{n+1}$$

Klíčová slova. důkazové metody, matematická indukce, indukce

$$\sum_{i=1}^{n+1} aq^{i-1} = a\frac{1 - q^n + q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} aq^{i-1} = a\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Tím je vzorec dokázán.

A teď počítání ...

Příklad 1. Dokažte, že součet prvních n přirozených čísel je roven $\frac{n(n+1)}{2}$.

Příklad 2. Dokažte, že součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel je roven $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Příklad 3. Dokažte větu pana Binoma. Tedy vztah

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}, n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 4. Dokažte, že pro n přirozená je výraz $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ dělitelný devíti.

Příklad 5. Dokaž, že pro n přirozené platí $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$.

Příklad 6. Nechť funkce f pro každé $n > -1$ splňuje vztah $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$. Pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, tak platí $f(n) = n + 1$ pro všechna celá $n > -1$.

Příklad 7. Mějme n přímek v rovině. Dokaž, že tyto přímky dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n\,(n+1) + 1$ oblastí.

Příklad 8. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 .$$

Příklad 9. Dokaž, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.

Příklad 10. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1 + 1^{-3}\right)\left(1 + 2^{-3}\right)\cdots\left(1 + n^{-3}\right) < 3.$$

Příklad 11. Dokaž, že mezi každými 2^{n+1} čísly lze najít 2^n čísel takových, že jejich součet je dělitelný 2^n.

Příklad 12. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

platí pro všechna $n \geq 2$.

Příklad 13. Dokaž, že výraz $1 + 2^{4n+2} + 3^{4n+2} + 4^{4n+2} + 5^{4n+2} + 6^{4n+2}$ je pro všechna $n \geq 0$ dělitelný třinácti.

Příklad 14. Dokaž, že pro každých n kladných reálných čísel platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Literatura

Čerpal jsem ze staršího příspěvku Háni Bendové, která čerpala z textu Saši Kazdy, oběma uvedeným děkuji.

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction`