Matematická indukce

Háňa Bendová

Úvod

V této přednášce si budeme povídat o matematické indukci, což je věc nadmíru užitečná; bude se vám jistě ještě mnohokrát hodit, až budete dumat nad záludnými úlohami z PraSátka či matematické olympiády nebo zkrátka až budete mít neodbytnou touhu dokázat něco pěkného.

Princip matematické indukce

Matematická indukce je jedna ze základních důkazových metod, která se obvykle používá, chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení či matematická věta platí pro všechna přirozená čísla.

Důkaz matematickou indukcí spočívá v tom, že nejprve ukážeme, že tvrzení $T(n)$ platí pro nejmenší číslo n (většinou $n = 1$), a následně dokážeme, že jestliže tvrzení $T(n)$ platí pro všechna $n \leq k$ (tomu se obvykle říká indukční předpoklad), pak platí i $T(k+1)$. Můžeš si snadno rozmyslet, že takovýto důkaz opravdu funguje.

Ukážeme si jednoduchý příklad, který nám přiblíží, jak že se tedy v praxi důkazy matematickou indukcí provádějí.

Vzorový příklad. Ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Vzorové řešení vzorového příkladu.
První krok: Tvrzení $T(1)$ vypadá jako $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, což jistě platí.
Druhý krok: Předpokládejme, že platí $T(n)$ pro všechna $n \leq k$ (číslo k nám zadává „nepřítel"). Chceme ukázat, že $T(k+1)$ je pravda. Můžeme si vypomoci tvrzením $T(k)$, které zní:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Přičteme tedy na obě strany této rovnosti číslo $k + 1$ a upravujme:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}.$$

Ale to je přesně tvrzení $T(k+1)$. Jsme tedy hotovi.

Cvičení

Příklad 1. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

Příklad 2. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2\,.$$

Příklad 3. Mějme n přímek v rovině. Dokaž, že tyto přímky dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2} n\,(n+1) + 1$ oblastí.

Příklad 4. Mějme kruh a n bodů, které leží na jeho obvodu. Každé dva body spojme úsečkou. Na kolik částí tím rozdělíme kruh?

Příklad 5. Dokaž, že oblasti v rovinné mapě, která je tvořena n kružnicemi, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze obarvit dvěma barvami tak, že spolu nesousedí žádné dvě oblasti stejné barvy.

Příklad 6. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} < 1.$$

Příklad 7. Dokaž, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1 + 1^{-3}\right)\left(1 + 2^{-3}\right)\cdots\left(1 + n^{-3}\right) < 3.$$

Příklad 8. Dokaž, že mezi každými 2^{n+1} čísly lze najít 2^n čísel takových, že jejich součet je dělitelný 2^n.

Příklad 9. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

platí pro všechna $n \geq 2$.

Příklad 10. Dokaž, že výraz $1 + 2^{4n+2} + 3^{4n+2} + 4^{4n+2} + 5^{4n+2} + 6^{4n+2}$ je pro všechna $n \geq 0$ dělitelný třinácti.

Příklad 11. Dokaž, že pro každých n kladných reálných čísel platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Při psaní příspěvku jsem využila loňský úvod ke čtvrté sérii, který napsal Saša Kazda.