Matematická heuristika

Pavel Paták

Úvod

Pokud nás řešení příkladu nenapadá na první pohled, musíme systematicky vyzkoušet množství možností. Matematická heuristika se zabývá tím, jak nejrychleji nalézt tu správnou. Ukazuje se, že existuje pár postupů, které vedou k cíli téměř vždy. Ty nejpoužívanější si vysvětlíme a ukážeme na příkladech.

Důkazy existence

Chceme-li dokázat, že nějaký objekt existuje, téměř jistě využijeme jedno z následujících tvrzení.

Tvrzení. (Nutná existence) Jde-li daný objekt zkonstruovat, pak existuje.

Příklad. Nechť $a \in \mathbb{N}$. Dokažte, že rovnice $x^2 - y^2 = a^3$ má celočíselné řešení.

Tvrzení. (Dirichletův princip)

(1) Je-li $n + 1$ perel rozděleno do n šuplíků, pak existuje alespoň jeden šuplík, ve kterém jsou alespoň 2 perly.
(2) Vlétlo-li alespoň $kn + 1$ holubů do k děr holubníku, pak existuje alespoň jedna díra, do které vlétlo více než n holubů.
(3) Je-li nekonečně mnoho molů v konečně mnoha skříních, aspoň v jedné z nich jich musí být nekonečně.

Cvičení.

(1) Kolik osob je minimálně zapotřebí, abychom mohli tvrdit, že existují 3 osoby mající narozeniny ve stejný den?
(2) Ve čtverci o straně délky 7 je 51 bodů. Dokažte, že vždy existují tři body, které leží v kruhu o poloměru 1.
(3) Střelecký terč ve tvaru rovnostranného trojúhelníka byl 17-krát trefen. Co můžeme říct o minimu vzdáleností mezi jednotlivými trefami?
(4) Každý bod prostoru je obarven červeně nebo modře. Ukažte, že existuje kvádr, jehož vrcholy mají všechny stejnou barvu.
(5) Každý bod prostoru je obarven modře, červeně či zeleně. Označme M, Č, Z množiny všech čísel r takových, že existuje úsečka délky r, jejíž oba koncové body jsou modré (červené, zelené). Dokažte, že alespoň jedna z těchto množin obsahuje všechna kladná reálná čísla.
(6) Body s celočíselnými souřadnicemi nazýváme mřížové body. V prostoru

vybereme libovolných 9 mřížových bodů $B_1, B_2, ...B_9$. Dokažte, že střed jedné z úseček B_iB_j $(1 \leq i < j \leq 9\ )$ je mřížovým bodem.

(7) V obdélníku 10x17 je 74 bodů. Dokažte, že existují dva, jejichž vzdálenost je maximálně 2.

(8) Nechť p je prvočíslo větší než 3 a n přirozené číslo takové, že p^n má v desítkovém zápisu 20 cifer. Dokažte, že alespoň jedna z cifer se objevuje více než dvakrát.

(9) Nechť P je množina n prvočísel. M buď množina více než n přirozených čísel, z nichž žádné nemá prvočinitele, který by neležel v P. Dokažte, že existuje $T \subseteq M$ taková, že součin všech čísel z T je čtverec.

Dirichletův princip je speciální případ následující hrůzostrašně vypadající věty:

Věta. (Ramsey) *Pro každé n a pro každou t-tici čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ existuje číslo $r(k_1, k_2, \ldots, k_t; n)$ takové, že pro každou množinu A, která má alespoň r prvků platí: Rozdělíme-li všechny n-prvkové podmnožiny A do t přihrádek $T_1, T_2, \ldots, T_t$, pak existují $F \subseteq A$ a i takové, že F má velikost aspoň k_i a každá n-prvková podmnožina F náleží do T_i. Nejmenší takové číslo r se nazývá Ramseyovo číslo.*

Triviální případy jsou:

$$r(k_1, \ldots, k_t; 1) = 1 + \sum_{i=1}^{t}(k_i - 1)$$
$$r(k_i, r; r) = r(r, k_1; r) = k_1$$

Je-li některé k_i je menší než n, platí navíc $r(k_1, \ldots, k_t; n) = k_i$.

Ostatní Ramseyova čísla se nazývají netriviální. Je jich známo 12. Pro zbylá čísla máme jen hrubé odhady. Např.

$$k_1, k_2 \leq r(k_1, k_2; n) \leq \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1}.$$

Příklad. Mezi šesti lidmi vždy existují 3 lidé, kteří se navzájem neznají nebo tři lidé, kteří se navzájem znají. Pro 5 lidí to již neplatí.

Nevíme-li, jak v existenčním důkazu začít, zkusíme využít následující jednoduché tvrzení:

Tvrzení. (Existence maxima a minima) Každá konečná množina čísel obsahuje maximální a minimální prvek.

Prostě si vybereme nějaký objekt, který je svým způsobem výjimečný.

Cvičení.

(1) Dokažte, že každý konvexní mnohostěn obsahuje dvě stěny se stejným počtem hran.

(2) V rovině je n studní a n domů. Dokažte, že domy jdou spojit se studnami tak, že žádné dvě cesty se nebudou křížit.
(3) V rovině je dán konečný počet bodů, které nejsou všechny kolineární. Dokažte, že existuje přímka, která prochází právě přes dva z nich.

Důkazy neexistence

Máme-li dokázat, že něco neexistuje, buď najdeme nějaký vhodný invariant, či zvolíme důkaz sporem.

Cvičení.

(1) Na každé pole šachovnice 7x7 postavíme jezdce, je možné potáhnout všemi jezdci naráz dle šachových pravidel?
(2) Může pro přirozená čísla a, b, c platit $(2^a - 1)(2^b - 1) = 2^{2^c} + 1$?

Využití symetrie

Ačkoli se symetrie nejčastěji využívá v geometrii, můžeme ji uplatnit téměř kdekoli. Je-li problém symetrický, ušetří nám to spoustu času a práce. Máme-li důvod se domnívat, že je symetrické i řešení, rovnou odvrhneme všechny nesymetrické nápady. Speciálním případem je tzv. princip nedostatečného důvodu, tj. tvrzení, že kde není důvod na rozlišení, tam nemůže být rozdíl.

Příklad. Roznásobte $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Řešení. Vzhledem k symetrii víme, že výsledek je tvaru $A(a^3+b^3+c^3)+B(a^2b+ +a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+C(abc)$. A okamžitě vidíme, že $A = 1, B = 0, C = -3$.

Příklad. Zjednodušte $\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$

Řešení. Nejprve si všimneme, že výraz je symetrický vzhledem k a, b, c. Aby měl výraz smysl, musí platit $a \neq b$. Ze symetrie tedy $a \neq b \neq c \neq a$

Daný výraz je vlastně polynom $P(d)$ (nejvýše druhého stupně). Dosazení $d = a$ a symetrie dává, že $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Jedná se tedy o konstantní polynom a výraz je vždy roven jedné.

Příklad. Najděte maximum výrazu xy za podmínek $x + y = 1, x > 0, y > 0$.

Řešení. Vztahy jsou symetrické, můžeme tedy očekávat, že maximum nastane pro $x = y = \frac{1}{2}$. Nemá důvod nastávat jinde. Ověříme to: Buď $x = \frac{1}{2} + e$, $y = \frac{1}{2} - e$. Pak $xy = \frac{1}{4} - e^2$, tedy maximum skutečně nastává pro $e = 0$

Cvičení.

(1) Dva hráči pokládají mince na obdélníkový stůl tak, aby se nepřekrývaly.

Kdo již nemůže položit minci na stůl prohrál. Má některý z hráčů vyhrávající strategii? Jestli ano, kdo a jakou?

(2) Dokažte pro $a, b, c > 0$ nerovnost $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

(3) Najdete minimum výrazu $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ za podmínek $0 < x_i < 1$ a $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1$.

(4) V libovolném trojúhelníku platí $\frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \leq \frac{1}{2}$. Přitom odhad $\frac{1}{2}$ nejde zlepšit.

Hledání zákonitostí

Když už nás nenapadá nic jiného, zkusíme si napsat pár jednoduchých příkladů, vyřešit problém pro malá čísla apod. Postupujeme přitom systematicky, abychom se vyhnuli zbytečné práci. Třeba nás časem něco napadne.

Cvičení.

(1) Buď S_1 posloupnost 1,2,3,4,... všech přirozených čísel. Nechť S_{n+1} vznikne z S_n tak, že čísla z S_n, která jsou dělitelná n zvětšíme o jedničku. S_2 je tedy posloupnost 2,3,4,5,6,7,... a S_3 posloupnost 3,3,5,5,7,7,... . Najděte všechna přirozená čísla, pro která platí, že prvních $n-1$ členů S_n má stejnou hodnotu.

(2) Definujme rekurentně zadanou posloupnost $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$,

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 7}{a_n}$$

pro $n > 0$. Dokažte, že všechna členy jsou přirozená čísla.

Ostatní postupy

Metod jak řešit matematické úlohy existuje pochopitelně celá řada, uvedu jen letmý výčet dalších metod: kreslení obrázků, přeformulování zadání, modifikace problému (dokážeme silnější tvrzení), výběr vhodného označení, rozdělí problému na speciální případy, zpětný postup, nepřímý postup, zevšeobecnění.

Při řešení každého příkladu se vždy snažme svůj postup reflektovat. Naše schopnosti řešit cokoli se velice rychle zvýší, pokud si uvědomíme, že ke každému příkladu se hodí jiná metoda a dovedeme co nejrychleji vybrat tu správnou. Ale pokud nic nevíme, tak je nám i sebelepší heuristika na nic.