

Magické čtverce

BÁRA KOCIÁNOVÁ

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá magickými čtverci, které patří spíše do rekreační matematiky. Popisuje jejich základní vlastnosti, uvádí zajímavosti z historie a na závěr podává návod, jak vytvořit magický čtverec lichého řádu.

Definice. Mějme čtvercovou mřížku $n \times n$. Pokud se nám podaří vyplnit ji po sobě jdoucími čísly tak, aby součet čísel v řádcích, sloupcích i na hlavních diagonálách byl stejný, nazveme výsledek *magickým čtvercem*. Počtu řádků n říkáme *řád* magického čtverce, součtu čísel v řádku pak *magická konstanta*.

Poznámka. Ať ke všem číslům v magickém čtverci přičteme libovolnou konstantu, budou se součty v řádcích, sloupcích a diagonálách i nadále rovnat. Totéž platí o vynásobení stejným číslem. Proto se budeme bavit pouze o magických čtvercích obsahujících čísla od 1 do n^2 .

Cvičení. Jak se obecně spočítá magická konstanta?

Kolik jich je?

Magický čtverec prvního řádu je jeden, a je naprosto nezajímavý. Druhého řádu nelze vytvořit, protože mezi čísly od jedné do čtyř jsou jen dvě dvojice čísel, jejichž součet je pět. To je magická konstanta pro $n = 2$, neboť $n(n^2 + 1)/2 = 10/2$.

Čtverec 3×3 existuje pouze jeden. Všechny ostatní jsou jen variacemi, které vzniknou otočením nebo převrácením podél nějaké osy symetrie.

Cvičení. Proč není čtverců 3×3 více?

Zní to jako málo? Magických čtverců řádu čtyři už je 880. Přišel na to v roce 1693 Bernard Frénicle de Bessy a dokonce je i všechny sestrojil, nicméně první analytický důkaz tohoto počtu vznikl až v roce 1982. Čtverců 5×5 je 275305224, což je poznatek z roku 1974, a pro řád 6 to ještě ani nikdo nespočítal.

Proč magické?

Pravděpodobně se čtvercům popsaných vlastností říká magické ze dvou důvodů. Prvním je krása stejných součtů a některé další vlastnosti, které se dají ve čtvercích objevit. Tím druhým a možná důležitějším je pak skutečnost, že magické čtverce se často objevovaly na nejrůznějších amuletech a talismanech, kterým měly zajistit čarovnou moc.

Magické čtverce jsou známy už velmi dlouho, podle některých zdrojů to jsou dokonce nejstarší matematické objekty uvedené v literatuře. Údajně to bylo v knize Zhuang Zi, která pochází zhruba ze čtvrtého století př. n. l. Zmiňuje i legendu vysvětlující, jak se magický čtverec řádu tři v Číně objevil.

Císař Jü zvaný Velký se prý za své vlády potýkal s mnoha povodněmi, a proto budoval hráze a přehrady. Když jednou stál u řeky Luo, vynořila se z ní želva, která měla na krunýři obrazec později nazvaný Luoshu. A to byl právě magický čtverec, jen místo čísel využíval odpovídající počty teček.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Čtverce v umění i na šachovnici

Nejen matematiky magické čtverce fascinovaly – například německý výtvarník Albrecht Dürer v roce 1514 vytvořil rytinu známou pod názvem Melancholia I., v jejímž pravém horním rohu se nachází magický čtverec čtvrtého řádu. Zajímavá jsou na ní hlavně čísla 15 a 14 umístěná vedle sebe uprostřed v posledním řádku, která odpovídají právě roku vzniku.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Další číselný čtverec řádu čtyři je na fasádě barcelonské katedrály Sagrada Família. Ten ale neobsahuje čísla po sobě jdoucí. Od čtyř čísel totiž autor odečetl jedničku, aby snížil magickou konstantu ze 34 na 33, Kristův věk při ukřižování.

Americký státník, zakladatel druhé nejstarší univerzity v USA a vynálezce hromosvodu Benjamin Franklin uměl doplnit čísla do magického čtverce rozumné velikosti stejně rychle, jako by je jen psal. S tím se však nespokojil, neboť to prý považoval za docela běžnou schopnost, a tak vymyslel čtverec 8×8 (a později i 16×16) splňující řadu dalších vlastností.

Například polovina každého řádku a sloupce dává součet 130, což je polovina magické konstanty. Můžete v něm zkusit najít i další zajímavosti:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

S magickými čtverci si samozřejmě hráli i významní matematici. Leonhard Euler si okolo roku 1759, když už byl docela slepý, lámal hlavu nad tím, jestli může šachový kůň přeskákat všechna pole šachovnice. Řešení našel, a navíc přišel na to, že pokud do každého pole vepíšeme pořadí, v jakém na něj kůň doskáče, dostaneme *polomagický čtverec* řádu osm. To znamená, že součty na diagonálách neodpovídají těm v řádcích a sloupcích.

Od té doby si matematici kladli otázku, jestli neexistuje i nějaká magická cesta koně po šachovnici. Odpověď jim dal až počítač v roce 2003, kdy našel všechny možné cesty, z nichž bylo 140 polomagických, ale magický čtverec netvořila žádná.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Vytvoření magického čtverce

Starí Číňané hledali magické čtverce prostým napsáním čísel (šora dolů a zprava doleva, jak měli ve zvyku) a následným prohazováním rohů, řádků, sloupců, dokud všude nevyšel správný součet. Pro čtverec 3×3 to je snadné, nicméně u větších už to muselo trvat docela dlouho.

Postupně byly objeveny různé elegantnější metody, ta nejznámější pro čtverce lichého řádu pochází ze 17. století, nese název Siamská a je prý výtvořem francouzského velvyslance v Siamu, Simona de la Loubère. Pro čtverce sudých řádů existuje zvlášť metoda pro řády tvaru $4k$ a $4k + 2$, nicméně ani jedna není tak snadná a

kouzelná, proto je vynecháme.

Siamská metoda začíná napsáním jedničky do prostředního pole prvního řádku. Dále se vždy podíváme o jedno pole nahoru a doprava, přičemž pokud utečeme z tabulky, vrátíme se do ní na druhé straně. Tedy řádek o jeden výše než první je poslední, sloupec za posledním je první atd. Pokud je toto pole volné, dopíšeme na něj následující číslo. Pokud už je zabrané, napíšeme příští číslo o řádek níž. Nejlépe se postup pochopí z následujícího čtverce:

17	24	1	8	15
16	23	5	7	14
22	4	6	13	20
3	10	12	19	21
9	11	18	25	2

Cvičení. Proč uvedená metoda vytvoří magický čtverec?

Řešení. Stačí si rozmyslet, že v každém řádku, sloupci i diagonále budou vždy čísla s n různými zbytky po dělení n a s n různými celými částmi po dělení n . Důležité je, že úhybný manévr děláme po n krocích a číslo $nk + 1$ napíšeme o dva řádky níž a o jeden sloupec doleva oproti číslu $n(k - 1) + 1$, kde k značí pořadí vyplňované diagonály.

Cvičení. Zdůvodněte, proč podobná metoda nefunguje pro čtverce sudého řádu.

Řešení. Protože vyplňujeme čísla po lámaných diagonálách, musí být na hlavní diagonále vedoucí z levého dolního do pravého horního rohu n po sobě jdoucích čísel, která dávají správný součet. Takovým budeme pro tuto chvíli říkat *diagonální*.

Ověříme, jestli je součet čísel $(n^2 - n)/2 + 1, \dots, (n^2 - n)/2 + n$ roven magické konstantě:

$$n \cdot \frac{n^2 - n}{2} + 1 + \dots + n = n \cdot \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Výraz napravo je vzoreček pro výpočet magické konstanty. Vidíme tedy, že jsme našli diagonální čísla, ačkoli nevíme, kam na hlavní diagonálu máme nejmenší z nich umístit.

Dále zjistíme, kolik čísel je před těmi diagonálními. Je jich $(n^2 - n)/2 + 1 - 1 = n(n - 1)/2$. Všimneme si, že pro sudé n tento výraz není dělitelný n . Číslo $n - 1$ je totiž nutně liché a dvojka ze jmenovatele se zkrátí s n .

Prvních $(n^2 - n)/2$ čísel tedy nevyplní celý počet lámaných diagonál, proto na hlavní diagonále nemůže být nejmenším číslem $(n^2 - n)/2 + 1$, a tudíž čísla na hlavní diagonále nedávají správný součet.

Literatura a zdroje

- [1] Swetz, J., F.; *Legacy of the Luoshu*
- [2] Polášek M.; *Latinské a magické čtverce*, is.muni.cz/th/211209/prif_m/
- [3] Roskovec, T.; *Magické čtverce*, mks.mff.cuni.cz/library/