Magické čtverce

Tomáš Roskovec

Úvod

Magické čtverce patří k dávným matematickým hrátkám, které i přes dvoutisíciletou historii dodnes nejsou zcela prozkoumány. Během přednášky se budeme zabývat nejprve výskytem magických čtverců v historii a později i jejich matematickou stránkou. Pro začátek si zadefinujeme základní pojmy přednášky.

Definice. *Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách členy se stejným součtem. Obvykle se každé číslo smí vyskytovat v tabulce pouze jednou.*

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Definice. *Normální magický čtverec je magický čtverec, jehož členy jsou přirozená čísla od* 1 *do* n^2.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Historie magie ve čtverci

První písemnou zmínku nalézáme v Číně, kde byla v letech 650 př.n.l sepsána legenda o *Lo Shu*. Podle tohoto starého čínského příběhu se magický čtverec objevil na zemi tak, že za obrovské potopy objevil císař *Yu* želvu, které měla na zádech vzor

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Jak jste jistě uhodli, šlo o želvu magickou, protože se jedná o normální magický čtverec o straně 3. *Lo Shu* čtverec je zajímavý mimo jiné tím, že kterýkoli magický čtverec o straně 3 lze vytvořit z *Lo Shu* pomocí zrcadlení a rotace.

Kromě této legendy nacházíme mnoho magických čtverců z kamene a z kovu v podobě amuletů používaných ve starém Egyptě, Indii i Číně. Pro všechny tyto civilizace měly čtverce pravděpodobně spíše numerologický a astrologický význam.

Později se objevily i v Persii a také mezi Araby, odkud se konečně dostávají do Evropy. Vynalézaví Arabové již dokázali zkonstruovat čtverce o straně 5 a 6.

První písemný záznam o magických čtvercích v Evropě pochází z roku 1300 od Řeka Manuela Maschopula. V roce 1450 pak Ital Luca Pacioli shromažďuje ve své práci mnoho příkladů těchto útvarů. Vrcholnou prací magického pojetí tohoto tématu publikuje v roce 1510 Heinrich Cornelius Agrippa. Jeho *Okultní filozofie* se rychle rozšířila po celé Evropě. Přiřadil magické čtverce jednotlivým planetám a popsal jejich užití v přivolávání ďáblů a andělů. Pro příklad uvedu čtverce Saturnu, Jupiteru a Marsu.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Kromě těchto opravdových čtverců odpovídajících naší definici se samozřejmě objevuje řada dalších podobných útvarů, někdy například vyplněných písmeny nebo porušujících některá pravidla.

Velmi zajímavý pohled nám nabízí čtverec Albrechta Dürera, který se v roce 1514 objevil v jeho rytině *Melancholie* . Zkuste objevit další magické vlastnosti této tabulky:

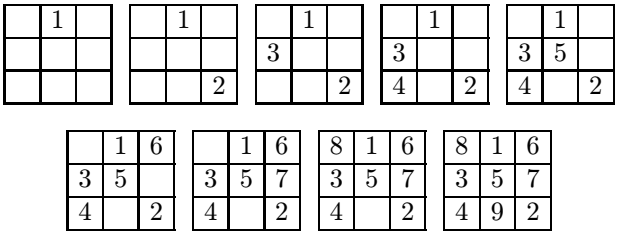
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Metody konstrukce

Existuje mnoho metod konstrukce magických čtverců, zde uvedu pouze ty nejjednodušší. Magický čtverec o straně n lze zkonstruovat pro každé n kromě případu $n = 2$. Pro jiná n rozlišíme tři případy, n liché, n dělitelné 4, n nedělitelné 4 sudé.

Konstrukce pro n lichá

Umístíme jedničku na prostřední políčko první řádky. Pak postupujeme vždy diagonálně vpravo nahoru, dokud nenarazíme na obsazené políčko. V takovém případě postoupíme o jedno pole dolů a opět stoupáme po diagonále, dokud nezaplníme celý čtverec.



Konstrukce pro n dělitelná 4

Nejprve očíslujeme všechna pole čtverce po řádcích zleva doprava, takže v políčku vlevo nahoře bude 1, v políčku vpravo nahoře n, vlevo dole $n^2 - n + 1$ a vpravo dole n^2. Pak si rozdělíme tabulku na čtverce o straně 4. V nich si zvýrazníme obě diagonály. Nyní můžeme spárovat neoznačená políčka tak, že spojíme-li středy políček úsečkou, pak se střed této úsečky bude shodovat se středem celé tabulky. Prohodíme-li čísla v každém takovém páru, dostaneme hledaný normální magický čtverec.

1	2	3	**4**	**5**	6	7	**8**
9	**10**	**11**	12	13	**14**	**15**	16
17	**18**	**19**	20	21	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	**29**	30	31	**32**
33	34	35	**36**	**37**	38	39	**40**
41	**42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48
49	**50**	**51**	52	53	**54**	**55**	56
57	58	59	**60**	**61**	62	63	**64**

1	63	62	**4**	**5**	59	58	**8**
56	**10**	**11**	53	52	**14**	**15**	49
48	**18**	**19**	45	44	**22**	**23**	41
25	39	38	**28**	**29**	35	34	**32**
33	31	30	**36**	**37**	27	26	**40**
24	**42**	**43**	21	20	**46**	**47**	17
16	**50**	**51**	13	12	**54**	**55**	9
57	7	6	**60**	**61**	3	2	**64**

Konstrukce pro sudá n nedělitelná 4

Teď nás čeká nejsložitější úkol. Pro začátek si čtverec rozdělíme na malé čtverečky o straně 2. Pak si podle algoritmu pro konstrukci čtverce s lichým n čtverečky očíslujeme 1 až n^2. Do čtverečku číslo k se pokusíme vepsat čísla $4k-3, 4k-2, 4k-$ $-1, 4k$ tak, abychom dostali magický čtverec. Použijeme k tomu takzvanou LUX metodu. Čtverečky v prostřední řadě a nad ní označíme písmenem L, čtverečky v řadě pod prostřední U a zbytek X. Nakonec prohodíme označení prostředního čtverečku s tím pod ním. Podle obrázku pak doplníme čtveřice čísel v pořadí příslušejícím k danému písmenku.

L

4	1
2	3

U

1	4
2	3

X

1	4
3	2

Takto budou rozloženy čtverečky o straně 2 ve velkém čtverci:

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

Dodatek o množství

Není těžké si domyslet, že počet různých magických čtverců při zvětšení strany rychle poroste. Počty jednotlivých čtverců, kde za různé považuji čtverce, které nelze ztotožnit rotací nebo zrcadlením, jsou pro jednotlivé strany:

1	2	3	4	5
1	0	1	880	275305224

Počet čtverců o straně 6 je odhadován dokonce na $1,8 \cdot 10^{17}$.

Další útvary čtvercového ražení

Kromě těchto základních pojmů si lze zadefinovat ještě velké množství obdobných útvarů, které sice nemají tak bohatou historii, ale nabízejí mnoho dalších problémků a hříček.

Definice. *Heteročtverec je čtvercová tabulka, jejíž členy jsou přirozená čísla od* 1 *do* n^2. *Součty členů v každém sloupci, v každé řádce i na obou diagonálách jsou po dvou různé.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dokázali byste zkonstruovat heteročtverec lichého řádu velikosti 5? Zkuste vymyslet algoritmus pro obecný lichý řád.

Definice. *Antimagický čtverec je heteročtverec, pro který lze součty členů v každém sloupci, v každé řádce a na obou diagonálách seřadit do aritmetické posloupnosti s krokem 1.*

15	2	12	4
1	14	10	5
8	9	3	16
11	13	6	7

Dodnes není vyřešeno, zda lze tyto čtverce zkonstruovat pro každé $n > 3$, ale víme, že pro 1 a 2 žádný způsob neexistuje. Neexistenci *antimagického čtverce* řádu 3 se zatím podařilo dokázat jen pomocí programu na rozbor možností.

Definice. *Panmagický čtverec je normovaný magický čtverec, který má součty na všech diagonálách stejné.*

Poznámka. V této definici bereme za diagonály všechny úhlopříčné posloupnosti polí délky n, přípustné jsou i vedoucí přes okraj tabulky.

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Literatura

http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square
http://www.gaspalou.fr/magic-squares/results.htm