Matematická logika (povídání k 6. sérii)

Hlavním předmětem studia matematické logiky je obecný pohled na matematické teorie. Každá teorie má svůj jazyk a své axiomy. **Jazykem** se myslí seznam všech povolených symbolů (relačních, funkčních, konstant a operací), **axiomy** jsou nějaká tvrzení, která prohlásíme za pravdivá. Chceme-li něco v takové teorii dokázat, vycházíme z axiomů a logickým postupem se snažíme dobrat k dokazovanému tvrzení. Samozřejmě, budujeme-li takto rozsáhlejší teorii, můžeme vycházet i z dříve dokázaných tvrzení.

Uvedu zde příklad teorie uspořádání s nejmenším prvkem (TUSNP). Jazyk obsahuje relační symboly $\preccurlyeq$, $=$ a konstantu $\perp$. Axiomy této teorie jsou následující:

(1) $a \preccurlyeq a$
(2) $a \preccurlyeq b \ \& \ b \preccurlyeq a \ \Rightarrow \ a = b$
(3) $a \preccurlyeq b \ \& \ b \preccurlyeq c \ \Rightarrow \ a \preccurlyeq c$
(4) $\perp \preccurlyeq a$

Součástí každého jazyka jsou samozřejmě také názvy proměnných (x, y, atd.) a logické spojky (& značí „a“, $\vee$ značí „nebo“, $\neg$ značí negaci) a kvantifikátory. Pokud jsou v nějakém axiomu či tvrzení nekvantifikované proměnné, tvrzení platí pro všechny takové $x, y, \dots$ (např. axiom (1) $(\forall a)\ a \preccurlyeq a$, axiom (3) $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ \cdots$).

Mezi těmito axiomy chybí popis relace $=$ (resp. $\neq$). Tyto dva relační symboly se vyskytují v každé rozumné matematické teorii, a proto jejich přítomnost budeme vždy předpokládat s tím, že pro ně budou platit všechny vlastnosti, na které jsme intuitivně zvyklí. Formálně vzato, jazyk každé teorie bude obsahovat relační symboly $=, \neq$ a axiomy budou doplněny o následující:

(1) $x = x$
(2) $x = y \ \Rightarrow \ (\forall a)\ (a \sim x \Leftrightarrow a \sim y) \ \& \ (x \sim a \Leftrightarrow y \sim a)$ pro lib. relační symbol $\sim$
(3) $x = y \ \Rightarrow \ F(x) = F(y)$ pro libovolný funkční symbol F
(4) $x = y \ \Rightarrow \ (\forall a)\ (a * x = a * y) \ \& \ (x * a = y * a)$ pro libovolnou operaci $*$
(5) $x \neq y \iff \neg\ x = y$

Popis matematické teorie je vlastně soupisem vlastností, které by měl mít popisovaný objekt. Dá se dokázat, že pokud z axiomů nelze dokázat spor, pak existuje nějaká struktura, pro kterou jsou axiomy splněny. Nazývá se **model**. Modelem tedy myslíme neprázdnou množinu M, na které jsou definovány konstanty, funkce, operace a relace odpovídající symbolům jazyka tak, že pro ně platí axiomy. Je jasné, že modelů jedné teorie může být více a že se mohou navzájem dost lišit.

Zde je příklad dvou modelů TUSNP (modelem této teorie je libovolná uspořádaná množina s nejmenším prvkem).

I) Přirozená čísla. Nechť $M = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\perp = 0$, $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b$. Je vidět, že axiomy jsou pro takto definované symboly splněny.

II) Systém podmnožin. Nechť X je nějaká množina a M je systém všech jejích podmnožin. Nechť $\perp = \emptyset$ a $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \subseteq b$. Pak jsou splněny axiomy, neboť pro $A, B, C \subseteq X$

(1) $A \subseteq A$ zjevně.
(2) $A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A \ \Rightarrow \ A = B$ také platí.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(3) $A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$ je rovněž zřejmé.
(4) $\emptyset \subseteq A$ samozřejmě také.

Tento důkaz je dosti jednoduchý, vždy tomu tak zdaleka nebude.

V úlohách po vás zpravidla budeme chtít, abyste zjistili, zda dané tvrzení v dané teorii platí. Může se vám povést dokázat, že platí, nebo se vám může povést dokázat negaci (tzn. že neplatí), ale také se vám nemusí povést ani jedno. Ne vždy je chyba na vaší straně. Pokud jsou axiomy příliš slabé, tvrzení nejde ani dokázat, ani vyvrátit (říkáme, že je **nerozhodnutelné**). To může být také správná odpověď, ale musíte ji dokázat. Jedna z metod, pro vás asi nejlepší, je sestrojení dvou modelů dotyčné teorie, přičemž v jednom bude příslušné tvrzení pravdivé, kdežto v druhém nikoliv. Pokud takové modely sestrojíte, nemůžete samozřejmě z axiomů dotyčné tvrzení dokázat ani vyvrátit, neboť byste v jednom z těchto modelů dostali spor.

Příklad: Zjistěte, zda v TUSNP platí $(a \preccurlyeq b \;\vee\; b \preccurlyeq a)$.

Řešení: Toto tvrzení je (jak jinak) nerozhodnutelné. Vezměme model I. V něm je toto tvrzení realizováno jako $(\forall a \in M)\ (\forall b \in M)\ (a \leq b \;\vee\; b \leq a)$. To je ale zjevně pravda.

Teď si vezměme model II. Zde toto tvrzení znamená $(\forall A \subseteq X)\ (\forall B \subseteq X)\ (A \subseteq B \;\vee\; B \subseteq A)$. To rozhodně neplatí, pokud je množina X alespoň dvouprvková. Takže dotyčné tvrzení není možné z daných axiomů dokázat ani vyvrátit.

Pokud stále ještě příliš nerozumíte tomu, co se po vás chce, nezoufejte! Zde je to vše ve zkratce:

„Zjistěte, zda v této teorii platí “ znamená provedení jedné z těchto variant:

(1) Dokažte, že pokud platí axiomy, pak platí dokazované tvrzení.
(2) Dokažte, že pokud platí axiomy, pak platí negace dokazovaného tvrzení.
(3) Sestrojte model této teorie takový, že v něm platí dokazované tvrzení a sestrojte model této teorie takový, že v něm neplatí dokazované tvrzení.

„Sestrojte model“ znamená nalezení takové množiny a konstant, funkcí, operací a relací na ní, že platí axiomy.

Upozornění 1: Dokazujete-li nějaké tvrzení, nepovažujte za známé nic, než dané axiomy. Dokazujte pečlivě i zdánlivé triviality, uvidíte, že ne vždy je důkaz od pohledu jasných tvrzení jednoduchý.

Upozornění 2: Předchozí upozornění neplatí pro konstrukci modelů. Při ní se řiďte stejnými pokyny jako v každé jiné sérii.

Nenechte se odradit zdánlivou hrůzostrašností příkladů. Ve skutečnosti nejsou nijak složité, leckdy je zadání delší než řešení. Tato série by vás měla naučit abstraktnímu myšlení. V pokročilejších partiích matematiky občas jakékoliv představy selhávají a nastupuje práce s abstraktními symboly podle jakýchsi pravidel. Chtěl jsem vám tento pocit „opravdových matematiků“ zprostředkovat. Při řešení si vyzkoušejte různé důkazové techniky (dedukci, indukci, důkaz sporem, aj.).

Hezké chvíle s mými příklady vám přeje

David