Logika

Libor Barto

Výroková logika

Definice. (Jazyk výrokové logiky) *Ve výrokové logice používáme tyto symboly:*
(1) *Výrokové proměnné: velká písmena, případně opatřená indexy.*
(2) *Výrokové spojky:* $\neg, \rightarrow, \ \&\ , \vee, \equiv, \ldots$.
(3) *Pomocné symboly: závorky. Souhrn těchto symbolů se nazývá* abeceda. *Slovo je libovolná konečná posloupnost tvořená symboly abecedy.*

Definice. (Formule)
(1) *Každá výroková proměnná je formule.*
(2) *Pokud slova* α, β *jsou formule, pak též slova* $\neg\alpha, (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \vee \beta), \ldots$ *jsou formule.*
(3) *Každá formule vznikne konečnou aplikací pravidel* (1) *a* (2).

Z důvodu lepší čitelnosti se v případech, kdy nehrozí nedorozumění, závorky vynechávají (např. vnější závorky u formule $(\alpha \rightarrow \beta)$*).*

Definice. (Ohodnocení)
(1) Ohodnocením *výrokových proměnných rozumíme zobrazení, které každé výrokové proměnné přiřadí hodnotu 0 nebo 1.*
(2) Hodnota *formule* ϕ *při ohodnocení* e *(značíme* $\phi[e]$*):*
  (a) *Je-li* ϕ *výroková proměnná, tak* $\phi[e]$ *značí hodnotu přiřazenou této proměnné (tj.* $e(\phi)$*).*
  (b) *Známe-li hodnoty formulí* ϕ, ψ*, pak hodnoty formulí* $\neg\phi, \phi \rightarrow \psi, \ldots$ *získáme ze známých tabulek pro výrokové spojky.*

Definice. (Odvoditelnost z ohodnocení)
(1) *Řekneme, že systém formulí* $\mathcal{A}$ *je ohodnocením* e splněn (je pravdivý *při ohodnocení* e*) — značíme* $\mathcal{A}[e] = 1$*, jestliže pro každou formuli* ϕ *ze systému* $\mathcal{A}$ *platí* $\phi[e] = 1$.
(2) *Řekneme, že systém formulí* $\mathcal{A}$ *je* splnitelný*, jestliže existuje ohodnocení* e *takové, že* $\mathcal{A}[e] = 1$.
(3) *Řekneme, že systém formulí* $\mathcal{A}$ *je* pravdivý*, jestliže je splněn při každém ohodnocení. Značíme* $\models \mathcal{A}$.
(4) *Řekneme, že formule* ϕ *je (tautologicky)* odvoditelná *ze systému formulí* $\mathcal{A}$ *(značíme* $\mathcal{A} \models \phi$*), jestliže* ϕ *je splněna při každé ohodnocení, které splňuje systém* $\mathcal{A}$.

(5) *Řekneme, že systém formulí $\mathcal{B}$ je (tautologicky) odvoditelný ze systému formulí $\mathcal{A}$ (značíme $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$), pokud je každá formule ze systému $\mathcal{B}$ odvoditelná z $\mathcal{A}$.*

Definice. (Axiomatická definice odvoditelnosti)

(1) *Řekneme, že konečná posloupnost formulí je důkaz ze systému formulí $\mathcal{A}$, jestliže každá formule posloupnosti je buď axiomem (viz níže) nebo prvkem systému $\mathcal{A}$ nebo vyplývá z některých dvou předešlých členů na základě dedukčního pravidla.*

(2) *Řekneme, že formule ϕ je odvoditelná ze systému formulí $\mathcal{A}$, jestliže existuje důkaz z $\mathcal{A}$, jehož posledním členem je ϕ. Značíme $\mathcal{A} \vdash \phi$. V případě, že je systém $\mathcal{A}$ prázdný, používáme značení $\vdash \phi$ a říkáme, že ϕ je odvoditelná ve výrokovém počtu.*

(3) *Řekneme, že systém formulí $\mathcal{B}$ je odvoditelný ze systému formulí $\mathcal{A}$ (značíme $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$), jestliže každá formule z $\mathcal{B}$ je odvoditelná z $\mathcal{A}$.*

Axiomy. (Axiomy výrokové logiky) *Pro libovolné formule α, β, γ jsou následující formule axiomy výrokové logiky:*

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha))$.

(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

(3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

Dedukční pravidlo zní: z $\alpha \to \beta$ a α odvoď β. Ostatní logické spojky vnímáme jako zkratky za vhodné formule (např. $A \vee B$ je zkratka za $\neg A \to B$, atd.).

Věta. (O dedukci) *$\mathcal{A} \models \phi \to \psi$ právě když $\mathcal{A}, \phi \models \psi$.*

Věta. (O důkazu sporem) *$\mathcal{A} \models \phi$ právě když $\mathcal{A}, \neg\phi \models$ spor (sporem rozumíme jakoukoliv formuli s hodnotou 0 při libovolném ohodnocení).*

Věta. (O důkazu rozborem případů) *$\mathcal{A}, \phi \vee \psi \models \alpha$ právě když $\mathcal{A}, \phi \models \alpha$ a současně $\mathcal{A}, \psi \models \alpha$.*

Definice. *Řekneme, že formule je* konjunktivní*, pokud je konjunkcí výrokových proměnných nebo jejich negací. Řekneme, že formule je* disjunktivně konjunktivní*, pokud je disjunkcí konjunktivních formulí. Analogicky definujeme* konjunktivně disjunktivní *formuli.*

Věta. (O normální formě) *Ke každé formuli lze nelézt ekvivalentní formuli v disjunktivně konjuktivním (resp. konjunktivně disjunktivním) tvaru.*

Věta. *Výroková logika je* bezesporná *teorie (z axiomů nelze odvodit spor) a její systém axiomů je* nezávislý *(žádný z axiomů nelze odvodit ze zbývajících dvou).*

Věta. (Postova) *$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ právě když $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.*

Logika 1. řádu (predikátorová logika)

Definice. (Jazyk logiky 1. řádu) *Ve logice 1. řádu používáme následující symboly:*
(1) *Individuální proměnné: malá písmena případně opatřená indexy.*
(2) *Relační symboly četnosti* $0, 1, 2, \ldots$*: vyjadřují vztahy mezi objekty. Kolika objektů se vztah týká vyjadřuje četnost. Např.* $\leq$ *je relační symbol četnosti* 2.
(3) *Fukněční symboly četnosti* $0, 1, 2, \ldots$*: vyjadřují funkční závislosti. Např.* $+$ *je funkční symbol četnosti* 2*. Funkční symboly četnosti* 0 *nazýváme konstanty.*
(4) *Logické spojky.*
(5) *Kvantifikátory:* $\exists, \forall$.
(6) *Pomocné symboly: závorky.*

Definice. (Termy)
(1) *Individuální proměnné jsou termy.*
(2) *Pokud* F *je funkční symbol četnosti* n *a* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *jsou termy, pak slovo* $F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *je term.*
(3) *Každý term vznikne konečnou aplikací pravidel* (1) *a* (2).

Definice. (Formule)
(1) *Je-li* R *relační symbol četnosti* n *a* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *jsou termy, pak* $R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *je formule (tzv. atomární).*
(2) *Jsou-li* ϕ, ψ *formule, pak* $\neg\phi, (\phi \to \psi), \ldots$ *jsou formule.*
(3) *Je-li* ϕ *formule, pak* $(\forall x)\phi, (\exists x)\phi$ *jsou formule (*ϕ *se nazývá rozsah příslušného kvantifikátoru).*
(4) *Každá formule vznikne konečnou aplikací pravidel* (1), (2) *a* (3).

Definice. (Volné a vázané výskyty individuálních proměnných ve formuli)
(1) *Všechny výskyty individuálních proměnných v atomárních formulích jsou volné.*
(2) *Všechny výskyty ve formuli vzniklé logickou spojkou jsou volné (resp. vázané), pokud byly volné (resp. vázané) v původních formulích.*
(3) *Ve formuli* $(\forall x)\phi$ *(resp.* $(\exists x)\phi$*) jsou všechny výskyty* x *vázané.*

Definice. (Otevřené a uzavřené formule) *Formule se nazývá otevřená (resp. uzavřená), jestliže všechny výskyty libovolné proměnné jsou volné (resp. vázané).*

Definice. (Substituovatelnost) *Řekneme, že term* τ *je substituovatelný za proměnnou* x *ve formuli* ϕ*, jestliže se žádný volný výskyt* x *ve* ϕ *nevyskytuje v rozsahu žádného kvantifikátoru vážícího proměnnou z termu* τ.

V této situaci značíme $\phi(x/\tau)$ *formuli, která vznikne nahrazením všech volných výskytů* x *ve* ϕ *termem* τ*. Pokud je z kontextu zřejmé o jakou proměnnou se jedná, píšeme pouze* $\phi(\tau)$.

Definice. (Realizace jazyka, ohodnocení)

(1) *Matematickou strukturou (prvního řádu) $\mathcal{M}$ rozumíme množinu M, množinu funkcí definovaných na M a množinu relací na M.*

(2) *Realizací jazyka ve struktuře rozumíme přiřazení, které jednotlivým funkčním a relačním symbolům přiřazuje funkce a relace na M, přičemž četnosti souhlasí (0-četným symbolům přiřadí hodnotu pravda nebo nepravda).*

(3) *Ohodnocením individuálních proměnných e v $\mathcal{M}$ rozumíme zobrazení, které individuálním proměnným přiřazuje prvky množiny M. Ohodnocení, které vznikne z e tak, že proměnnou x ohodnotíme m a jinak vše ostatní necháme, značíme $e(x/m)$.*

Definice. (Hodnota termu při ohodnocení) *Hodnotu termu τ při ohodnocení e (značíme $\tau[e]$) definujeme takto:*

(1) *Je-li τ individuální proměnná, pak $\tau[e] = e(\tau)$.*

(2) *Je-li F funkční symbol četnosti n, pak $F(\tau_1, \ldots, \tau_n)[e] = f(\tau_1[e], \ldots, \tau_n[e])$, kde f je realizace F ve struktuře.*

Definice. (Pravdivostní hodnota formule) *Pravdivostní hodnotu formule ϕ při ohodnocení e (značíme $\phi[e]$) definujeme takto:*

(1) *Je-li ϕ atomární formule $R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, pak $\phi[e] = 1$, pokud $\tau_1, \ldots, \tau_n$ splňují relaci r (r je realizace R). Jinak $\phi[e] = 0$.*

(2) *U formulí vzniklých spojením logickou spojkou se řídíme příslušnými tabulkami logických spojek.*

(3) *Je-li ϕ formule tvaru $(\exists x)\psi$, pak $\phi[e] = 1$ právě tehdy, pokud existuje prvek m příslušné struktury takové, že $\psi[e(x/m)] = 1$. Je-li ϕ formule tvaru $(\forall x)\psi$, pak $\phi[e] = 1$ právě tehdy, když pro každý prvek m příslušné struktury platí $\psi[e(x/m)] = 1$. Jinak definujeme $\phi[e] = 0$. Zde v obou případech nezávisí na ohodnocení x v e.*

Pokud $\phi[e] = 1$ řekneme, že formule ϕ je při daném ohodnocení pravdivá.

Definice. (Odvoditelnost z ohodnocení)

(1) *Řekneme, že formule ϕ je (při dané realizaci) ve struktuře $\mathcal{M}$* pravdivá, *je-li pravdivá při každém ohodnocení. Značíme $\mathcal{M} \models \phi$.*

(2) *Řekneme, že systém formulí $\mathcal{A}$ je* pravdivý *v $\mathcal{M}$, nebo že $\mathcal{M}$ je* modelem *$\mathcal{A}$, jestliže každá formule systému je pravdivá. Značíme $\mathcal{M} \models \mathcal{A}$.*

(3) *Řekneme, že systém formulí je* splnitelný, *jestliže existuje struktura, která je jeho modelem.*

(4) *Řekneme, že systém formulí $\mathcal{B}$ je (tautologicky)* odvoditelný *ze systému $\mathcal{A}$, jestliže pro každou strukturu $\mathcal{M}$ (a realizaci funkčních a relačních symbolů) platí: když $\mathcal{M} \models \mathcal{A}$, pak $\mathcal{M} \models \mathcal{B}$. Pokud je systém $\mathcal{A}$ prázdný, pak píšeme $\models \mathcal{B}$. Formule systému $\mathcal{B}$ se pak nazývají* tautologie.

Definice. (Axiomatická definice odvoditelnosti) *Axiomatická definice odvoditelnosti je stejná jako pro výrokovou logiku, máme pouze více axiomů a dvě dedukční pravidla.*

Axiomy. (Axiomy logiky 1. řádu s rovností)
(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha))$.
(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.
(3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.
(4) $(\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$ *(distribuce), pokud x nemá volný výskyt v α.*
(5) $(\forall x)\alpha \to \alpha(x/\tau)$ *(substituce), pokud τ je substituovatelný za x v α.*
(6) $x = x$.
(7) $x = y \to F(\ldots, x, \ldots) = F(\ldots, y, \ldots)$, *je-li F funkční symbol.*
(8) $x = y \to (P(\ldots, x, \ldots) \to P(\ldots, y, \ldots))$, *je-li P relační symbol.*
Dedukční pravidla jsou: z $\alpha \to \beta, \alpha$ odvoď β (odloučení) a z α odvoď $(\forall x)\alpha$ (generalizace). Formuli $(\exists x)\phi$ chápeme jako zkratku za formuli $\neg(\forall x)\neg\phi$.

Věta. (O tautologiích) *Je-li ϕ tautologie výrokové logiky a za výrokové proměnné dosadíme formule predikátorové logiky, získáme tautologii predikátorové logiky.*

Věta. (O konstantách) *Nechť $C_1, \ldots, C_n$ jsou konstanty, které se nevyskytují v systému formulí $\mathcal{A}$ ani ve formuli ϕ. Nechť $\mathcal{A} \models \phi(x_i/C_i)$. Pak $\mathcal{A} \models \phi$.*

Věta. (O zavedení konstant) *Nechť $\mathcal{A} \models (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\phi$, kde ϕ obsahuje volné proměnné $x_1, \ldots, x_n$ (a žádné jiné). Nechť $C_1, \ldots, C_n$ jsou konstanty, které se nevyskytují ani v $\mathcal{A}$ ani ve ϕ. Pokud $\mathcal{A}, \phi(C_1, \ldots, C_n) \models \psi$ a ψ neobsahuje $C_1, \ldots, C_n$, pak $\mathcal{A} \models \psi$.*

Definice. (Prenexní tvar) *Formule je v* prenexním *tvaru, pokud jsou na začátku uvedeny kvantifikátory vážící různé proměnné a ty jsou následovány otevřenou formulí.*

Věta. (O prenexním tvaru) *Ke každé formuli ϕ lze nalézt formuli ψ v prenexním tvaru takovou, že $\models \phi \equiv \psi$.*

Věta. *Predikátorová logika je bezesporná a její axiomy jsou nezávislé.*

Věta. (O úplnosti logiky prvního řádu) $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ *právě když* $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

Věta. (O kompaktnosti) *Nechť $\mathcal{A}$ je systém formulí, jehož každá konečná část je splnitelná. Pak $\mathcal{A}$ je splnitelný.*