Logika

Eva Špačková

Logika, o čem to vlastně je?

Motivační příklad: Radek bonzne v pondělí účastníkům: „Někdy od zítřka do pátku bude noční hra, ale vy ještě ten den ráno nebudete vědět, že se bude konat.“ Účastníci uvažují: „V pátek to být nemůže, protože to bysme ráno věděli, že to bude. Ve čtvrtek to být nemůže, protože v pátek to být nemůže a takže bysme věděli že to bude … “ – logicky si zdůvodní že noční hra nemůže být nikdy. V úterý je vedoucí vyženou na labyrint, což nečekali, takže Radek nelhal … Kde se stala chyba?

Pamatuji si, že když jsem chodila na gympl, představovala jsem si pod pojmem „logika“ vyplňování tabulek nulami a jedničkami, nebo ověřování sylogismů typu Některé myši jsou modré, kočkám modré myši nechutnají, je pravda, že některé myši kočkám nechutnají? Cílem přednášky tedy bude ukázat, o čem asi tak může být ta logika, kterou se zabývají profesoři na matfyzu.

Následující text je pouze pomůckou k přednášce, takže se jím nenechte odradit.

Výroková logika

Axiomy:

$(A1)$: $A \to (B \to A)$.

$(A2)$: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

$(A3)$: $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Pravidlo odloučení (Modus ponens): z formulí A a $A \to B$ odvoď B.

Definice. *Řekneme, že formule A je (tautologicky) odvoditelná ze systému formulí $\mathcal{A}$ (značíme $\mathcal{A} \models A$), jestliže A je splněna každým ohodnocením, které splňuje systém A. Ohodnocením rozumíme to, že každé výrokové proměnné přiřadíme nulu nebo jedničku.*

Definice. *Důkazem ze systému formulí $\mathcal{A}$ ve výrokovém počtu rozumíme konečnou posloupnost formulí takovou, že každý člen této posloupnosti je buď axiom výrokového počtu, nebo náleží do $\mathcal{A}$, nebo vyplývá z některých dvou předešlých členů na základě pravidla odloučení. To, že formule A je dokazatelná ze systému formulí $\mathcal{A}$ (tj. že existuje důkaz z $\mathcal{A}$, jehož posledním členem je A), značíme $\mathcal{A} \vdash A$.*

Věta. (O dedukci) $\mathcal{A} \vdash A \to B$ *právě tehdy, když* $\mathcal{A},\ A \vdash B$.

Věta. (O důkazu sporem) $\mathcal{A} \vdash A$ *právě tehdy, když* $\mathcal{A}$, $\neg A \vdash$ *spor.*

Věta. (O důkazu rozborem případů) $\mathcal{A}$, $A \vee B \vdash C$ *právě když* $\mathcal{A}$, $A \vdash C$ *a* $\mathcal{A}$, $B \vdash C$.

Věta. (O úplnosti výrokové logiky) $\mathcal{A} \vdash A$ *právě když* $\mathcal{A} \models A$ *(dokazatelné jsou právě ty formule, které jsou tautologiemi).*

Predikátová logika

Axiomy:

($A1$)–($A3$) axiomy výrokové logiky.

($A4$): $(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$ (axiom distribuce).

($A5$): $(\forall x)A \to A(x/\tau)$, pokud term τ je substituovatelný v x (to je splněno např. vždy když τ je samotná proměnná).

Pravidlo odloučení jako u výrokové logiky.

Pravidlo generalizace: z A odvoď $(\forall x)A$.

Definice. *Důkazem ze systému formulí* $\mathcal{A}$ *v jazyce teorie* T *rozumíme konečnou posloupnost formulí takovou, že každý člen této posloupnosti je buď axiom predikátového počtu, nebo axiom teorie* T*, nebo náleží do* $\mathcal{A}$*, nebo vyplývá z některých dvou předešlých členů na základě pravidla odloučení nebo generalizace. To, že pro formuli* A *existuje důkaz v* T *ze systému formulí* $\mathcal{A}$*, značíme* $\mathrm{T}, \mathcal{A} \vdash A$.

Definice. (neformální) *Modelem teorie* T *rozumíme strukturu, ve které existují všechny symboly teorie* T *a jsou v ní splněny axiomy teorie* T*. To, že struktura* $\mathcal{U}$ *je modelem teorie* T*, značíme* $\mathcal{U} \models \mathrm{T}$*. Řekneme, že formule* A *je v teorii* T *pravdivá, jestliže je pravdivá v každém modelu teorie* T*. Značíme to* $\mathrm{T} \models A$.

Věta. (O úplnosti predikátového počtu) $\mathrm{T} \vdash A$ *právě když* $\mathrm{T} \models A$ *(formule jazyka teorie* T *je dokazatelná právě tehdy, když je pravdivá v každém modelu teorie* T*).*

Peanova aritmetika (PA)

Axiomy:

($P1$): $Sx \neq 0$.

($P2$): $Sx = Sy \to x = y$.

($P3$): $x + 0 = x$.

($P4$): $x + Sy = S(x + y)$.

($P5$): $x \cdot 0 = 0$.

$(P6)$: $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$.
$(P7)$: $\neg(x < 0)$.
$(P8)$: $x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.
Axiom indukce: $(A(x/0)\&(\forall x)(A \rightarrow A(x/Sx))) \rightarrow A$.

Modelem Peanovy aritmetiky jsou například přirozená čísla s obvyklým $+$, $\cdot$, $<$ a symbolem S coby přičítáním jedničky (následník). Tomuto modelu se říká *standardní model Peanovy aritmetiky* a značí se $\mathcal{N}$.

Gödelovy věty

Věta. (1. Gödelova) *Existuje formule Peanovy aritmetiky, která je pravdivá ve standardním modelu, ale není dokazatelná prostředky PA (a ani její negace není dokazatelná).*

Dokonce platí, že takovou formuli najdeme v každé teorii, která Peanovu aritmetiku obsahuje.

Věta. (2. Gödelova) *V PA je nedokazatelné, že PA je bezesporná.*

Věta. (Tarského) *Nemůže existovat algoritmus, který by o zadané formuli PA řekl, jestli je nebo není pravdivá v přirozených číslech (tj. ve standardním modelu).*